

Feuille d'exercices 9

Primitives, intégrales. Intégration par parties, changements de variables.

Rappel. La fonction $\arctan : x \mapsto \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$ est appelée arctangente. Elle est définie sur $\mathbb{R}$ et prend des valeurs comprises entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$. Enfin elle est caractérisée par l'équivalence

$$\theta = \arctan(x) \iff 1) \theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\text{ et } 2) \tan(\theta) = x.$$

Exercice 9.1.— Calculer les primitives des fonctions suivantes. On indiquera sur quel intervalle on travaille.

$$\begin{array}{llll} \text{a)} & x \mapsto x(x^3 + 1) & \text{b)} & x \mapsto \frac{1}{x-3} \\ \text{c)} & x \mapsto \sin(2x - \pi/8) & \text{d)} & x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2x+3}} \\ \text{e)} & x \mapsto \frac{x+1}{x^2+2x+4} & \text{f)} & x \mapsto \sin^2(x) \\ \text{g)} & x \mapsto \frac{1}{\cos^2(x+\pi/2)} & \text{h)*} & x \mapsto \frac{1}{x^2+4} \end{array}$$

Exercice 9.2.— Calculer les intégrales suivantes.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} & \int_1^2 \frac{x^3 + 3x^2 - 5x + 4}{x^4} dx & \text{b)} & \int_0^1 \frac{x-2}{x^2-4x-12} dx \\ \text{c)*} & \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{x^2-1}{x^2+1} dx \end{array}$$

Exercice 9.3.— Calculer les intégrales suivantes, à l'aide d'une ou plusieurs intégrations par parties.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & \int_1^e \sqrt{x} \ln x \, dx \text{ puis } \int_1^e \ln x \, dx, \text{ b)} \int_0^1 (x+1)e^{-x} \, dx \text{ puis } \int_0^1 (x+1)^2 e^{-x} \, dx, \\ \text{c)} & \int_0^{\pi/2} (x^2 - 3x + 2) \sin x \, dx, \text{ d)} \int_0^{\pi/2} e^x \cos x \, dx, \text{ e)} \int_0^{\pi/3} \tan x \, dx \end{array}$$

Exercice 9.4.— À l'aide de changements de variables simples, calculer les primitives ou les intégrales suivantes. On pourra à chaque fois commencer par écrire la fonction $f(t)$ à intégrer sous la forme $f(t) = g(u(t))u'(t)$, en explicitant les deux fonctions $g(u)$ et $u(t)$.

Pour les primitives, on précisera l'intervalle sur lequel on travaille.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} & \int^x \frac{dt}{t \ln^2 t} & \text{b)} & \int^x \sin^3 t \, dt \\ \text{c)} & \int^x \frac{\cos t}{2 + \sin t} \, dt & & \\ \text{d)} & \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{1 + \sin^2 t} \, dt & \text{e)} & \int_3^8 \frac{dt}{t\sqrt{t+1}} \, dt \\ \text{f)} & \int_0^{\ln(2)} \frac{4e^{2t} - 2e^{3t}}{1 + e^t} \, dt & & \end{array}$$

Exercice 9.5.— Formule de Taylor avec reste intégral.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction trois fois dérivable, avec $f'''(x)$ continue sur $\mathbb{R}$. On introduit trois expressions :

$$R_0(x) = \int_0^x f'(t) dt, \quad R_1(x) = \int_0^x (x-t)f''(t) dt, \quad R_2(x) = \int_0^x \frac{1}{2}(x-t)^2 f'''(t) dt.$$

1. Montrer que $f(x) = f(0) + R_0(x)$.

2. En utilisant une intégration par parties relier $R_1(x)$ et $R_0(x)$. En déduire que

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + R_1(x).$$

3. En utilisant une intégration par parties relier $R_2(x)$ et $R_1(x)$. En déduire que

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{1}{2}x^2 f''(0) + R_2(x).$$

4. Application : on considère $f(x) = e^x$. Rappeler le développement limité à l'ordre 2 en 0 de e^x , notamment la partie quadratique $P_2(x)$. Expliciter le reste intégral $f(x) - P_2(x) = R_2(x)$ (comme ci-dessus). En déduire que $1 + x + \frac{1}{2}x^2$ est une approximation de e^x à 10^{-3} près, pour peu que $|x| \leq$: compléter en justifiant !