Feuille d'exercices 8

Equations différentielles.

Exercice 8.1.— Premier ordre à coefficients constants

1. Résoudre l' équation différentielle $x' - 2x = -1$.

2. Déterminer l'unique fonction $x : t \mapsto x(t)$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ qui vérifie

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R}, x'(t) = 3x(t) \text{ (ou : } x' = 3x, \text{ou : } x' - 3x = 0) \\ x(0) = 1 \end{cases}.$$

3. Résoudre de même $\begin{cases} x' = \ln(2)x \\ x(1) = -4 \end{cases}$.

4. Résoudre l'équation différentielle $x' - 2x = \mathrm{e}^{2t}$ puis le problème différentiel $\begin{cases} x' = 2x + \mathrm{e}^{2t} \\ x(1) = 3\mathrm{e}^2 \end{cases}$.

Exercice 8.2.— Deuxième ordre à coefficients constants

1. (cas homogène) Pour chacune des équations suivantes déterminer l'ensemble de toutes les solutions possibles :

(1) $x'' - 3x' + 2x = 0$

(2) $x'' - 4x' + 4x = 0$

(3) $x'' - 4x' + 5x = 0$

2. (avec second membre) Pour chacune des équations suivantes déterminer l'ensemble de toutes les solutions possibles :

(1) $x'' - 3x' + 2x = 2$, puis $x'' - 3x' + 2x = 2\mathrm{e}^{-t}$ et enfin $x'' - 3x' + 2x = \mathrm{e}^t$

(2) $x'' - 4x' + 4x = \mathrm{e}^t$, puis $x'' - 4x' + 4x = \mathrm{e}^{2t}$

(3) $x'' - 4x' + 5x = \sin(2t)$, puis $x'' - 4x' + 5x = \sin(t)$

Exercice 8.3.— Conditions initiales

Dans la deuxième question de l'exercice précédent déterminer l'unique solution telle que $x(0) = 0$ et $x'(0) = 1$.

Exercice 8.4.— Premier ordre à coefficients quelconques

Résoudre l'équation $tx'(t) = 2x(t) - t$. Expliciter la solution vérifiant $x(1) = 0$.