Feuille d'exercices 7

Valeurs intermédiaires, accroissements finis, Taylor-Lagrange

Exercice 7.1.— Montrer que l'équation

$$x(\cos x)^9 + x^2 \sin x + 1 = 0$$

possède au moins une solution sur $\mathbb{R}$. On énoncera avec soin le théorème utilisé.

Exercice 7.2.— Dans cet exercice, on énoncera avec soin chacun des théorèmes utilisés.

Soit f la fonction définie par $f(x) = x\cos(x) + 1$.

1. Calculer f' et f''. Faire le tableau de variation de f' et de f sur l'intervalle $[0, \pi/2]$. Montrer que f a un unique maximum entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ (on ne cherchera pas à calculer sa valeur).

2. a) Montrer que $-3 \leq f''(x) \leq 0$ pour tout $x \in [0, 1]$.

b) En déduire que $1 + x - \frac{3x^2}{2} \leq f(x) \leq 1 + x$ pour tout $x \in [0, 1]$.

3. a) Montrer que f s'annule au moins une fois sur chacun des intervalles $]\pi/2, \pi[$ et $]\pi, 2\pi[$.

b) En déduire que f' s'annule au moins une fois sur l'intervalle $]\pi/2, 2\pi[$.

Exercice 7.3.— Soit $f :]-\frac{1}{2}, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = (1 + 2x)^{\frac{1}{2}}$.

(a) Ecrire la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 en $x = 0$ pour f.

(b) En déduire que

$$1 + x - \frac{x^2}{2} \leq f(x) \leq 1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2}, \ \forall\, x \in [0, +\infty[.$$

Exercice 7.4.— Montrer que pour tout $0 < a < b$ on a

$$\frac{b-a}{1+b^2} \leq \arctan b - \arctan a \leq \frac{b-a}{1+a^2}.$$

Exercice 7.5.—

Montrer les encadrements suivants:

(1) $1 + x \leq \mathrm{e}^x \leq 1 + x + \frac{x^2}{2}\mathrm{e}^{|x|},\ x \in \mathbb{R}$,

(2) $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1 + x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3},\ x > 0$,

(3) $|\sin x - x + \frac{x^3}{6}| \leq \frac{|x|^5}{120},\ x \in \mathbb{R}$.

Exercice 7.6.— On considère la fonction $g : x \mapsto x^3 - 3x + 1$.

1. Dresser le tableau de variation de g.

2. Montrer que l' équation $g(x) = 0$ possède exactement trois solutions réelles, notées $a < b < c$.

3. Calculer $g(\frac{1}{2})$. Donner un encadrement de b de largeur $\frac{1}{2}$.