Université Paris Saclat **L1PCST – 1er semestre 2025-2026**
Mathématiques **PCDD101**

Feuille d'exercices 6

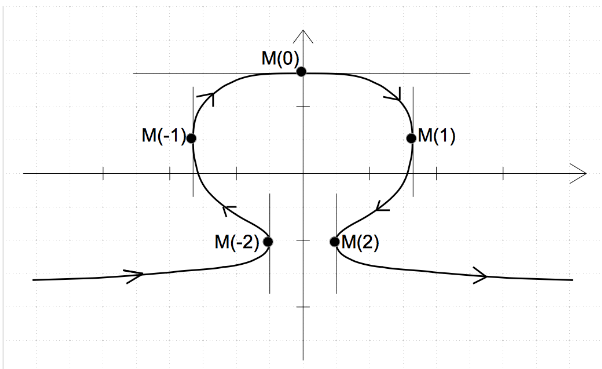
Courbes paramétrées

Exercice 6.1.— Tracer l'allure de la courbe paramétrée $M : t \mapsto (x(t), y(t))$ dont le *tableau de variation conjoint* est le suivant :

t	-2		-1		0		1		2
$x'(t)$	-4	$-$	-2	$-$	0	$+$	2	$+$	4
$x(t)$	4	$\searrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	4
$y(t)$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2
$y'(t)$	9	$+$	0	$-$	-3	$-$	0	$+$	9

On tracera notamment les vecteurs vitesse et les tangentes donnés par le tableau.

Exercice 6.2.— On considère une courbe paramétrée $M(t)_{t\in\mathbb{R}}$ dont le tracé est le suivant :



Donner le tableau de variation conjoint de cette courbe.

Exercice 6.3.— On considère la courbe paramétrée définie par $M(t) = (x(t), y(t))$ avec $x(t) = \sin(\frac{t}{4})$ et $y(t) = \sin(t)$ pour $t \in \mathbb{R}$.

1. Montrer qu'on obtient la même courbe image si on se restreint aux valeurs de t dans l'intervalle $[-2\pi, 6\pi]$.

2. On se restreint pour l'instant aux valeurs de t dans l'intervalle $[0, 2\pi]$.

a. Donner dans un même tableau les variations de $x(t)$ et $y(t)$.

b. Tracer les tangentes à la courbe aux points $M(0)$, $M(\frac{\pi}{2})$, $M(\pi)$, $M(\frac{3\pi}{2})$, $M(2\pi)$.

c. Donner l' équation de la tangente Ã la courbe en $t = \frac{2\pi}{3}$. Tracer cette tangente.

d. Tracer la portion de courbe obtenue lorsque t décrit $[0, 2\pi]$. On note $\mathcal{C}$ cet ensemble.

e. Calculer $\sin(t)$ en fonction de $\sin(\frac{t}{4})$ pour $t \in [0, 2\pi]$. En déduire une fonction f dont $\mathcal{C}$ est le graphe.

3. On voudrait tracer le reste de la courbe.

a. Calculer $M(-t)$ en fonction de $M(t)$. À quelle opération géométrique correspond cette formule ? En déduire le tracé de la courbe correspondant à $t \in [-2\pi, 0]$.

b. De même, calculer $M(t+4\pi)$ en fonction de $M(t)$. À quelle opération géométrique correspond cette formule ? Quelle portion de courbe peut-on maintenant tracer ?

c. Finir le tracé de la courbe.

Exercice 6.4.— Quand on trace avec une calculatrice la courbe paramétrée d'équation $\gamma(t) = \left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}, \dfrac{2t}{1+t^2}\right)$, on trouve le cercle $\mathcal{C}$ de centre $(0,0)$ et de rayon 1.

1. Expliquer pourquoi l'image de cette courbe paramétrée γ est incluse dans le cercle $\mathcal{C}$.

2. Donner le tableau de variation conjoint de γ. Quelle partie du cercle $\mathcal{C}$ est décrite ?

Exercice 6.5.— Etudier les courbes paramétrées $t \mapsto (x(t), y(t))$ suivantes. On cherchera notamment les symétries, les tangentes horizontales ou verticales, les asymptotes (préciser les équations). Enfin tracer la courbe ainsi que la tangente T demandée.

1. $x(t) = t^2$, $y(t) = t^3 - 3t$. Equation de la tangente T en $t = 2$?

2. $x(t) = t^2 + 2t$, $y(t) = \dfrac{1+t}{t^2}$. Equation de la tangente T en $t = 1$?

3. $x(t) = \cos(t)$, $y(t) = \frac{t}{2} + \sin(t)$. Equation de la tangente T en $t = \frac{\pi}{2}$? Tracer d'abord la portion de courbe pour $t \in [0, 2\pi]$. Calculer ensuite $M(t+2\pi)$ en fonction de $M(t)$, et interpréter géométriquement la formule obtenue. En déduire le reste du tracé.

4. $x(t) = \dfrac{t}{1+t^2}$, $y(t) = \dfrac{t^2}{1+t^2}$. Equation de la tangente T en $t = 1$? Comment se comporte la courbe quand t tend vers $+\infty$ ou $-\infty$? Avec quelle direction s'approche-t-elle du point limite ?

Exercice 6.6.—

On pose $x(t) = \frac{\cos(t)}{2+\cos(t)}$ et $y(t) = \frac{\sin(t)}{2+\cos(t)}$, on étudie la courbe paramétrée $M(t) = \big(x(t), y(t)\big)$ et on note $\mathcal{E}$ la courbe image.

1. Montrer que $M(t)$ et $M(-t)$ sont symétriques par rapport Ã une droite qu'on précisera. Vérifier que $M(t+2\pi) = M(t)$. Expliquer comment obtenir le tracé de $\mathcal{E}$ Ã partir du tracé de $M(t)$ sur $[0, \pi]$.

2. Déterminer le vecteur vitesse $\vec{V}(t)$. Dresser le tableau de variations conjoint (pour $t \in [0, \pi]$). Quelle est l' équation des tangentes T, T' en $t = 0, \frac{\pi}{2}$? Tracer $\mathcal{E}$ ainsi que T, T'.

3. Montrer qu'un point $M = (x, y)$ du plan est dans $\mathcal{E}$ si et seulement si ses coordonnées vérifient l' équation

$$\frac{9}{4}(x + \frac{1}{3})^2 + 3y^2 = 1$$

La courbe $\mathcal{E}$ est une ellipse.

Exercice 6.7.— Tangente en un point oÃ¹ la dérivée s'annule.

On étudie la courbe définie par $x(t) = 1 + t^2 - t^3$, $y(t) = t^2 + t^3$.

1. Calculer le vecteur vitesse $\vec{V}(t)$. Montrer que $t = 0$ est le seul temps oÃ¹ $\vec{V}(t) = \vec{0}$.

2. Pour $t \neq 0$ calculer la pente $p(t)$ de la sécante $\Delta = \big(M(0)M(t)\big)$. Calculer $\lim_{t\to 0} p(t)$. En déduire que la courbe admet une tangente en $t = 0$ et en donner une équation cartésienne.

Exercice 6.8.— On fixe un nombre complexe non nul $z = a + ib$. On pose $Z(t) = \mathrm{e}^{zt}$, autrement dit $Z(t) = \mathrm{e}^{at}(\cos(bt) + i\sin(bt))$. On étudie la courbe paramétrée définie (sur $\mathbb{R}$) par le point $M(t)$ d'affixe $Z(t)$. Soit $x(t) = \mathrm{e}^{at}\cos(bt), y(t) = \mathrm{e}^{at}\sin(bt)$.

1. Quelle est la courbe image lorsque $b = 0$? et lorsque $a = 0$?

2. On revient au cas général. Déterminer le vecteur vitesse $\vec{V}(t)$. Vérifier que l'affixe de $\vec{V}(t)$ est $z\mathrm{e}^{zt}$. La courbe a-t-elle un point stationnaire ?

3. Dans cette question on suppose que $a = \frac{1}{2}\sin(\frac{\pi}{12}), b = \frac{1}{2}\cos(\frac{\pi}{12})$.

a. En utilisant le cosinus de l'angle double, donner une formule qui relie $\cos(\dfrac{\pi}{12})$ et $\cos(\dfrac{\pi}{6})$. En déduire que $\cos(\dfrac{\pi}{12}) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$. Calculer alors $\sin(\dfrac{\pi}{12})$, puis montrer que $\tan(\dfrac{\pi}{12}) = 2 - \sqrt{3}$.

b. On pose $\tau = \frac{4\pi}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$. Montrer que $M(t+\tau)$ se déduit de $M(t)$ par une homothétie (qu'on précisera). Comment obtenir le tracé de la courbe géométrique $\{M(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ à partir du tracé de la courbe $\{M(t)\}_{t\in[0,\tau]}$?

c. Comparer la longueur du rayon-vecteur $\overrightarrow{OM(t)}$ Ã celle du vecteur vitesse $\vec{V}(t)$.

d. Quelles sont les limites de $x(t)$ et $y(t)$ quand $t \to \pm\infty$? La courbe admet-elle une branche infinie quand $t \to +\infty$? une direction asymptotique ?

e. Donner le tableau de variation conjoint de $x(t)$ et $y(t)$ (pour $t \in [0, \tau]$). Donner l'équation de la tangente T_0 à la courbe en $t = 0$. Tracer la courbe (pour $t \in [0, \tau]$).