
Feuille d'exercices 5

Calculs et utilisations de développements limités

Exercice 5.1.— Formule de Taylor.

1. Écrire la formule de Taylor en $x_0 = 0$ à l'ordre 2 (pour une fonction générale $x \mapsto f(x)$).
 2. À partir de cette formule, retrouver les DL(2) en 0 des fonctions $x \mapsto \exp(x)$, $x \mapsto \frac{1}{1+x}$, $x \mapsto \ln(1+x)$ et $x \mapsto \cos(x)$.
-

Exercice 5.2.— Somme et produit.

En utilisant les formules vues en cours, calculer les développements limités des fonctions suivantes, en 0 à l'ordre 2.

- (1) $\sin(x) + \cos(x)$; $e^x + \frac{1}{1-x}$
 - (2) $\sin(x) \cos(x)$; $\frac{e^x}{1-x}$.
-

Exercice 5.3.— Composition.

En utilisant les formules vues en cours (DL(2) usuels à connaître), calculer les développements limités des fonctions suivantes, en 0 à l'ordre 2.

- (1) e^{5x} ;
 - (2) $\sin(x^2)$;
 - (3) $e^{\sin(x)}$;
 - (4) $\frac{1}{1+\sin(x)}$;
 - (5) $\ln(\cos(x))$.
-

Exercice 5.4.— Limites à l'aide de développements limités.

À l'aide de développements limités, trouver les limites des fonctions suivantes.

- (1) $\frac{\ln(1+x^2)}{e^x - \sin(x) - 1}$ en 0;
 - (2) $\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)}$ en 0;
 - (3) $\frac{\tan(3 \ln(\cos(x)))}{\ln(\cos(\tan(3x)))}$ en 0.
-

Exercice 5.5.— Manipulations de fonctions epsilon.

Les calculs ci-dessous se lisent *de gauche à droite*.

Dans le membre de *gauche*, la notation ε désigne à chaque fois une certaine fonction (presque toujours de la variable x) qui n'est pas explicitée, mais qui par hypothèse tend vers 0 quand son argument tend vers 0.

On demande de justifier que les fonctions notées $\varepsilon(x)$ dans le membre de *droite* tendent vers 0 quand x tend vers 0. Pour cela il sera nécessaire de calculer explicitement les $\varepsilon(x)$ du membre de droite.

- (1) $x \exp(x) = \varepsilon(x); \sin(x) + \varepsilon(x) = \varepsilon(x); \varepsilon(x) + \varepsilon(x) = \varepsilon(x); \varepsilon(x) - \varepsilon(x) = \varepsilon(x)$
 - (2) $(2 + \varepsilon(x))\varepsilon(x) = \varepsilon(x); \varepsilon(x)\varepsilon(x) = \varepsilon(x); \varepsilon(\varepsilon(x)) = \varepsilon(x)$
 - (3) $(1 + x - x^2 + x^2\varepsilon(x)) + (2 - 3x + 2x^2 + x^2\varepsilon(x)) = 3 - 2x + x^2 + x^2\varepsilon(x)$
 - (4) $(1 + x - x^2 + x^2\varepsilon(x)) + (2 - 3x + x\varepsilon(x)) = 3 - 2x + x\varepsilon(x); 3x^2 + x^2\varepsilon(x) = \varepsilon(x) = x\varepsilon(x)$
 - (5) $(2 - x + 3x^2 + x^2\varepsilon(x)) - (1 + x - x^2 + x^2\varepsilon(x)) = 1 - 2x + 4x^2 + x^2\varepsilon(x)$
 - (6) $(-1 + 2x - 3x^2 + x^2\varepsilon(x)) - (1 + x + x^2 + x^2\varepsilon(x)) - (-2 + x - 4x^2 + x^2\varepsilon(x)) = x^2\varepsilon(x)$
 - (7) $x^2(x - 2x^2 + x^2\varepsilon(x)) = x^2\varepsilon(x); (1 + x + x\varepsilon(x))(1 - x + x\varepsilon(x)) = 1 + x\varepsilon(x)$
 - (8) $(3 - 2x + x^2 + x^2\varepsilon(x)) + (1 + x - 2x^2 + x^2\varepsilon(x)) = 3 + x - 7x^2 + x^2\varepsilon(x)$
 - (9) $(1 + x + x\varepsilon(x))(2 + 3x + 4x^2 + x^2\varepsilon(x)) = 2 + 5x + x\varepsilon(x)$
 - (10) $(1 + x + x\varepsilon(x))(3x + 4x^2 + x^2\varepsilon(x)) = 3x + 7x^2 + x^2\varepsilon(x)$
 - (11) Pour $y = 3x + 2x^2 + x^2\varepsilon(x)$ on a $-4 + 2y - y^2 + y^2\varepsilon(y) = -4 + 6x - 5x^2 + x^2\varepsilon(x)$
-

Exercice 5.6.— Développements limités et allure des fonctions

Calculer les développements limités des fonctions ci-dessous en 0 à l'ordre 2, et en déduire l'allure du graphe de ces fonctions au voisinage de 0 (équation de la tangente et position par rapport à celle-ci).

- (1) $\exp(x) + \sin(x)$;
 - (2) $\exp(x) \sin(x)$;
 - (3) $\sqrt{1 + 2x} \ln(1 + x)$;
 - (4) $\ln(1 + x + x^2)$;
 - (5) $\exp(\sqrt{1 + x})$.
-

Exercice 5.7.— Développements limités en $x_0 \neq 0$.

Donner le développement limité à l'ordre 2 en $\frac{\pi}{2}$ de la fonction $f : x \mapsto \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}$,

1. en calculant les dérivées successives de f .
 2. en effectuant le changement de variable $x = u + \pi/2$, et en utilisant des développements limités connus.
-

Exercice 5.8.— Limites À l'aide de développements limités.

Déterminer $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(3+x)^{\frac{1}{2}} - (7+x)^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{6}x}{\ln(x) \sin(\pi x)}$.

Exercice 5.9.— Développements limités et signe à la limite. Déterminer le signe de $f(x) = \frac{1+x}{2} + \ln(\cos(x-1)) - \sqrt{x}$ pour x suffisamment proche de $x_0 = 1$.

Exercice 5.10.— Développements limités en $x_0 \neq 0$ et allure des fonctions. Déterminer l'allure du graphe (tangente et position par rapport à celle-ci) au voisinage du point x_0 pour les fonctions suivantes.

- (1) $f_1 : x \mapsto \ln(1+x+x^2)$ en $x_0 = 1$.
 - (2) $f_2 : x \mapsto \sin(\ln(x))$ en $x_0 = 1$.
 - (3) $f_3 : x \mapsto \cos^2(x)$ en $x_0 = \frac{\pi}{2}$. Pourrait-on donner la tangente et la position du graphe par rapport À celle-ci sans calculer le DL(2) ?
-

Exercice 5.11.— Comparaison de fonctions. On considère les deux fonctions $x \mapsto 1 - \frac{1}{x}$ et $x \mapsto \ln x$.

1. Montrer que les deux graphes ont la même tangente au point d'abscisse 1. Quelle est la position des deux graphes par rapport À cette tangente ?
 2. Comparer les deux fonctions au voisinage de $x = 1$: lequel des deux graphes est au-dessus de l'autre ?
 3. Tracer rapidement sur un mÃame dessin les deux graphes ainsi que la tangente.
-

Exercice 5.12.— Asymptotes À un graphe de fonction.

Montrer que chacune des fonctions suivantes admet une asymptote quand $x \rightarrow +\infty$, en donner une équation, et enfin trouver la position du graphe par rapport à son asymptote.

- (1) $g_1 : x \mapsto -3x + 2 + \sin \frac{1}{x}$;
 - (2) $g_2 : x \mapsto \frac{x^2 + 1}{x + 1}$;
 - (3) $g_3 : x \mapsto (x + 1) \exp\left(\frac{1}{x - 1}\right)$.
-

Exercice 5.13.— Asymptotes À une courbe paramétrée.

On considère la courbe paramétrée $M(t)$ définie par $x(t) = \frac{2t^2}{1+t}$ et $y(t) = \frac{t^3}{1+t^2}$. Montrer que la courbe image de $M(t)$ admet une droite asymptote D quand $t \rightarrow \pm\infty$. On donnera une équation de D et on précisera la position de la courbe par rapport à son asymptote.

Exercice 5.14.— DLs et allure locale des courbes paramétrées. Pour chacune des courbes paramétrées suivantes, effectuer un DL de $x(t)$ et $y(t)$ au temps t_0 considéré pour en déduire une équation de la tangente en $M(t_0)$ et la position de la courbe relativement à cette tangente :

- (1) $x(t) = -e^t$, $y(t) = \cos(t)$ en $t_0 = 0$;
 - (2) $x(t) = \sqrt{1+2t}$, $y(t) = \sin(t)$ en $t_0 = 0$;
 - (3) $x(t) = 1 - \ln(t)$, $y(t) = 1 + \ln(2t - 1)$ en $t_0 = 1$;
 - (4) $x(t) = 2t + t^2$, $y(t) = 1 + 3t + t^2$ en $t_0 = -1$.
-

Exercice 5.15.— Fonctions convexes.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Dans cette question, on suppose que pour tout réel x on a $f''(x) > 0$.

a. Montrer alors qu'aucune droite du plan ne coupe le graphe de f en trois points distincts ou plus. (On pourra utiliser le théorème des accroissements finis.)

b. Montrer que chaque tangente au graphe de f coupe le graphe en exactement un point. (Même indication.)

2. Donner un exemple explicite de fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ qui ne vérifie pas les propriétés géométriques ci-dessus.

Exercice 5.16.— Points d'inflexion.

On suppose que $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction trois fois dérivable, avec $f''(0) = 0$ et $f'''(0) > 0$. Montrer que la courbe représentative de f traverse sa tangente en $(0, f(0))$, et donner précisément la position de la courbe représentative de f par rapport à sa tangente en 0 en un point d'abscisse x petite, selon le signe de x .