
Feuille d'exercices 12

Dérivée le long d'une courbe. Points critiques. Extremums.

Exercice 12.1.— Dérivées le long d'une courbe, dérivées composées

1. Soit f une fonction de deux variables. Soit alors g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = f(t^2, 3t + 2)$. Donner l'expression de $g'(t)$ en fonction des dérivées partielles de f .

Même question pour les fonctions

$$h(t) = f(t, t) ; j(t) = f(\sin(t), \cos(t)) ; k(t) = f(e^t \sin(t), \ln(1 + t^2))$$

2. Soit f une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

a. Exprimer les dérivées partielles de la fonction $f(xy)$ à l'aide de la dérivée f' .

b. Même question pour la fonction $f(xy \cos(xy^2))$.

Exercice 12.2.— Après avoir calculé les dérivées partielles, déterminer les points critiques des fonctions suivantes.

1. $f_1(x, y) = 1 + 2(x - 1)^2 + 3(y - 2)^2$.

2. $f_2(x, y) = 1 + x + y + x^2 - xy + y^2$.

3. $f_3(x, y) = x^3 + 3x^2y - 15x - 12y$.

4. (plus difficile) $f_4(x, y) = (1 - x)(1 - y)(x + y - 1)$.

5. Revenons à la fonction f_1 . Quelle est la valeur minimale prise par f_1 sur $\mathbb{R}^2$? En quel point du plan $\mathbb{R}^2$ cette valeur est-elle atteinte? Retrouver alors le résultat de la question 1.

Exercice 12.3.— Point critique : étude par restriction à des droites

On considère la fonction définie par

$$f(x, y) = xy + \frac{2}{x} + \frac{2}{y} - \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}y.$$

1. Quel est le domaine de définition de f ?

2. On veut montrer que f admet un seul point critique.

a. Etudier la fonction $g(x) = f(x, x)$. En déduire que $f(x, y)$ admet sur la droite d'équation $y = x$ un et un seul point critique (dont les coordonnées sont entières). Quelle est la valeur en ce point critique?

b. En factorisant la différence $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$, montrer que $f(x, y)$ n'admet pas de point critique en dehors de la droite d'équation $y = x$, et conclure.

3. Reprendre l'étude de $g(x)$ et en déduire que le point critique de f n'est pas un maximum (local ou absolu).

4. Etudier la fonction $h(x) = f(x, 4 - x)$ (on pourra factoriser $h'(x)$ par $2x - 4$). En déduire que le point critique de f n'est pas un minimum (local ou absolu).

5. La fonction f présente-t-elle un extremum (local ou absolu) sur son domaine de définition?

Exercice 12.4.— Lignes de niveaux de formes quadratiques

1. Montrer que la courbe $t \mapsto (\cos(t), 2\sin(t))$ reste à un niveau constant - lequel? - pour la fonction $f(x, y) = 4x^2 + y^2$. Deviner alors une paramétrisation de l'ensemble de niveau 1 de $f(x, y)$.

2. Montrer que la fonction $f(x, y) = x^2 + 2xy + 10y^2$ est de la forme $X^2 + 9y^2$, où X s'exprime simplement en fonction de x et y . En déduire que la courbe $t \mapsto (3\cos(t) - \sin(t), \sin(t))$ reste à un niveau constant pour la fonction $f(x, y)$. Comment décrire paramétriquement l'ensemble de niveau $c > 0$ quelconque?

3. Montrer que la courbe $t \mapsto (t, \frac{1}{t})$ reste à un niveau constant - lequel? - pour la fonction $f(x, y) = 3xy$. En déduire une paramétrisation de l'ensemble de niveau $c \neq 0$ de $g(x, y) = x^2 - y^2$ (on pourra poser $X = x + y, Y = x - y$).

Exercice 12.5.— Pour chacune des formes quadratiques suivantes :

- a. obtenir une forme canonique (somme de carrés ou produit de deux termes linéaires) ;
- b. donner l'allure des courbes de niveau passant par un point proche de $(0, 0)$;
- c. dire si $(0, 0)$ est un maximum, un minimum, ou un point col.

$$q_1(x, y) = 4xy ; q_2(x, y) = x^2 - 2xy + 2y^2 ; q_3(x, y) = -4x^2 - 12xy - 8y^2 ; q_4(x, y) = 4x^2 - 12xy + 9y^2$$

Exercice 12.6.— Point critique des polynômes de degré 2. On considère les fonctions

$$f_1(x, y) = 1 + x - y + x^2 - 2xy + 2y^2, f_2(x, y) = 1 + 2x + y - x^2 - xy - y^2, f_3(x, y) = 1 - x + y + x^2 + 4xy + y^2$$

Pour chacune des fonctions $f_i(x, y)$:

- 1.** Déterminer le gradient de $f_i(x, y)$ en tout point (x, y) de $\mathbb{R}^2$.
 - 2.** Quel est l'unique point critique $A = (a, b)$ de $f_i(x, y)$?
 - 3.** Etudier le signe de $f_i(x, y) - f_i(a, b)$ (pour cela on pourra considérer les variables $h = x - a$ et $k = y - b$ puis la forme quadratique $Q(h, k) = f_i(a + h, b + k) - f_i(a, b)$). La fonction $f_i(x, y)$ admet-elle un extremum local ou global?
-

Exercice 12.7.— Ensemble de niveau singulier et point critique

Soit $f(x, y)$ une fonction de deux variables. On suppose qu'il existe deux courbes de classe C^1 , notées $t \mapsto M_1(t) = (x_1(t), y_1(t))$ et $t \mapsto M_2(t) = (x_2(t), y_2(t))$ (définie sur $\mathbb{R}$), telles que

- (1) La fonction $f(x, y)$ est identiquement nulle sur les deux courbes : $f(x_1(t), y_1(t)) = 0$ et $f(x_2(t), y_2(t)) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
- (2) En $t = 0$ on a $M_1(0) = M_2(0) = (a, b)$, et les vecteurs vitesse $\vec{V}_1(0), \vec{V}_2(0)$ sont non nuls, de direction différente (non parallèles)

1. Dessiner l'allure de l'ensemble de niveau 0 au voisinage de (a, b) . Quelles sont les contraintes sur le vecteur gradient de f en (a, b) ? En déduire que (a, b) est un point critique.
 2. Application : étude de $f(x, y) = (2 - x^2 - y^2)(y - x^2)$.
 - a. Montrer que l'ensemble de niveau 0 de $f(x, y)$ est la réunion de deux courbes. En déduire que $f(x, y)$ possède deux points critiques et déterminer ces points critiques.
 - b. Étudier le signe de $f(x, y)$ en fonction de x et y pour (x, y) proche d'un des points critiques trouvés ci-dessus : faire un dessin dans le plan (Oxy) en indiquant les régions où $f > 0$, $f = 0$, $f < 0$. Le point $(1, 1)$ est-il un maximum ou un minimum local?
-