Feuille d'exercices 11

Fonctions de deux variables : dérivées partielles, gradient, formule de Taylor, lignes de niveau

Exercice 11.1.— Calculs de dérivées partielles
Calculer les deux dérivées partielles des fonctions suivantes (quand elles existent) :

$$2x-3y+1\ ,\ \mathrm{e}^x+\sin(y)\ ,\ \mathrm{e}^x\sin(y)\ ,\ x^4y-2x^2y^3-1$$
$$\sqrt{x+y+1}\ ,\ \ln(2x-y)\ ,\ \frac{xy^2}{2x-y}\ ,\ \ln\left(\cos(x)-y\right)\ ,\ (1-xy)\mathrm{e}^{x-2y}\ ,\ \sin\left(\frac{1}{1-x^2-y^2}\right).$$

Exercice 11.2.— Une question de définition
Soit $f(x,y)=x^2y^3$. On demande à deux étudiants de calculer le nombre $\frac{\partial f}{\partial x}(y,x)$: qui a raison ?

— Le premier dit : "$f(y,x)=y^2x^3$, je dérive par rapport à x et j'obtiens $\frac{\partial f}{\partial x}(y,x)=3y^2x^2$".
— Le second dit : "je calcule la dérivée de f par rapport à x, ce qui donne $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2xy^3$, puis j'échange x et y, et j'obtiens $\frac{\partial f}{\partial x}(y,x)=2yx^3$".

Exercice 11.3.— Conditions sur les dérivées partielles
Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose qu'en tout point (x,y) de $\mathbb{R}^2$ on a $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)>0$.

1. Quel est le comportement de $f(x,0)$ quand x parcourt $\mathbb{R}$?

2. Quel est le comportement de $f(0,y)$ quand y parcourt $\mathbb{R}$?

3. Montrer qu'il existe une fonction dérivable $\psi(y)$ telle que $f(x,y)=\psi(y)$. Décrire les lignes de niveau de $f(x,y)$.

Exercice 11.4.— Formule de Taylor et variation locale
On considère la fonction $f(x,y)=\cos(y)-y\mathrm{e}^{-x^2}$.

1. Calculer les deux dérivées partielles de $f(x,y)$ en $(0,0)$.

2. Ecrire la formule de Taylor (à l'ordre 1) pour $f(x,y)$ en $(0,0)$.
En déduire que pour tout r assez petit, la fonction $f(x,y)$ prend une valeur $>f(0,0)$ en exactement l'un des quatre points $A_r=(r,0),B_r=(0,r),C_r=(-r,0),D_r=(0,-r)$. Comparer aussi les valeurs de $f(x,y)$ aux trois autres points avec la valeur $f(0,0)$.

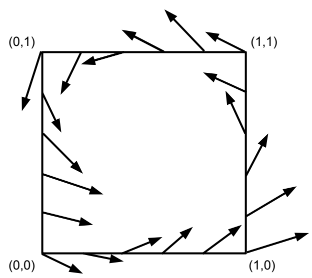
Exercice 11.5.— Orientation du gradient et variation

Soit $f(x, y)$ une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$, de classe $\mathcal{C}^1$.

1. Supposons que $\frac{\partial f}{\partial x}(x, 0) > 0$ pour tout $x \in [0, 1]$. Montrer qu'alors $f(1, 0) > f(0, 0)$. Comment se traduit géométriquement l'hypothèse faite ici ? (considérer le signe d'un produit scalaire du gradient).

2. Supposons que $\frac{\partial f}{\partial x}(x, 0) > 0$ pour tout $x \in [0, 1]$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(1, y) > 0$ pour tout $y \in [0, 1]$. Montrer qu'alors $f(1, 1) > f(0, 0)$. Comment se traduit géométriquement l'hypothèse faite ici ? (considérer le signe d'un produit scalaire du gradient).

3. Les vecteurs gradients de la fonction $f(x, y)$ peuvent-ils former le champ évoqué dans la figure ci-dessous ?



Exercice 11.6.— Dérivées partielles et approximations affines

1. Donner l'expression de la diagonale $d(x, y)$ d'un rectangle de côtés x et y.

2. On considère un rectangle de côtés x=30 cm et y=40 cm. En utilisant l'approximation affine de d (c'est-à-dire en négligeant le reste dans la formule de Taylor), donner une estimation de la variation de d lorsque x augmente de 4mm et y diminue de 1mm (sans utiliser la calculatrice !). Calculer la longueur de la nouvelle diagonale à la calculatrice, et comparer avec l'estimation.

Exercice 11.7.— Dérivées partielles et approximations affines

On considère un container en carton de volume $1m^3$, dont la base a pour dimension $x = 2m$ et $y = 1m$. On veut fabriquer un deuxième container en carton de même volume, avec une base de côtés 195cm et 95cm. Donner (sans calculatrice) une estimation de la différence de surfaces extérieures entre les deux containers à l'aide de l'approximation affine. Calculer la nouvelle surface à l'aide de la calculatrice, et comparer avec l'estimation.

Exercice 11.8.— Équations de droites et de plans, fonctions affines

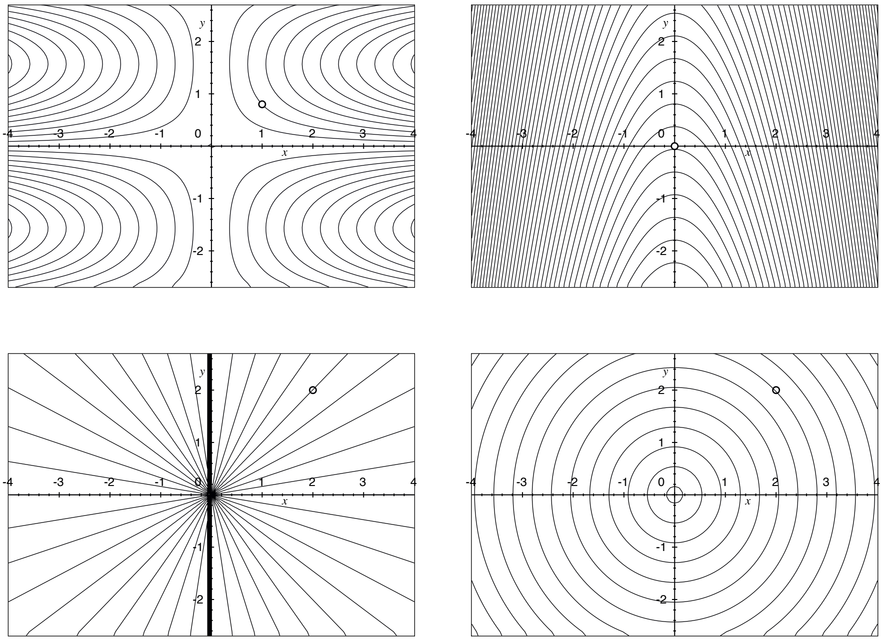
Dans le plan $\mathbb{R}^2$ muni des coordonnées (x, y), donner l'équation de la droite passant par le point $(-3, 2)$ et orthogonale au vecteur $(23, 34)$ (justifier).

Exercice 11.9.— Dérivées partielles et formule de Taylor, gradient et lignes de niveau

1. Pour les fonctions suivantes, calculer les dérivées partielles au point indiqué et écrire la formule de Taylor (en variables h, k). Récrire cette formule en introduisant le vecteur gradient.

$$\begin{array}{ll} f_1(x,y) = x\sin(y) \text{ au point } (1,\pi/4); & f_2(x,y) = \tan(x^2+y) \text{ au point } (0,0); \\ f_3(x,y) = \arctan(y/x) \text{ au point } (2,2); & f_4(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \text{ au point } (2,2). \end{array}$$

2. Ci-dessous on a représenté les lignes de niveau de ces fonctions. Tracer sur le dessin la tangente à la ligne de niveau passant par le point indiqué, puis déterminer une équation de cette droite.



Exercice 11.10.— Conditions sur le gradient

Soit $f(x,y) = 1 - x + 9y + x^2 + 3xy + 4y^2$

1. Calculer $\overrightarrow{\text{Grad}}_{(x,y)} f$ en tout point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

2. Montrer que l'ensemble des points (x,y) oà[1] le gradient est orthogonal à $(2,1)$ est une droite D, dont on donnera une équation cartésienne.

3. Donner l' équation de la courbe de niveau $\mathcal{C}$ passant par $(1,-1)$, vérifier que D passe par $(1,-1)$, puis donner une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ en ce point.

Exercice 11.11.— Graphe d'une fonction d'une variable et ligne de niveau
On considère la fonction $f(x,y) = xe^y - \sin(\frac{\pi}{2}x)$.

1. Calculer les dérivées partielles de $f(x,y)$ en tout point (x,y).

2. Déterminer l'unique point critique de $f(x,y)$.

3. On considère la fonction d'une variable $x \mapsto g(x) = \ln[\frac{\sin(\frac{\pi}{2}x)}{x}]$. Soit $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$ le graphe de g. Soit d'autre part $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^2$ la ligne de niveau 0 de $f(x,y)$: donc $\mathcal{L} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = 0\}$.

a. Déterminer le domaine de définition de g et calculer $f(x, g(x))$. En déduire que le graphe $\mathcal{C}$ est contenu dans la ligne $\mathcal{L}$.

b. Donner deux points de $\mathcal{L}$ qui ne sont pas sur $\mathcal{C}$.

c. Calculer la quantité

$$Q(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x)) + g'(x)\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))$$

Expliquer ce résultat en interprêtant la quantité $Q(x)$ comme un produit scalaire convenable.

d. Vérifier que $(1,0) \in \mathcal{C}$, et donner la tangente à la ligne de niveau $\mathcal{L}$ en ce point par deux méthodes différentes.

Exercice 11.12.— Etude par les courbes de niveaux
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que pour tout niveau c, la courbe de niveau $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = c\}$ est une droite complète de $\mathbb{R}^2$, d' équation $y = K - x$ (oà[1] la constante K dépend du niveau considéré c).

Montrer qu'alors il existe une fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a $f(x,y) = \varphi(x+y)$. Quelle est la direction du gradient en tout point ?