

## Feuille d'exercices 4

Limites, dérivées, tangentes, DL d'ordre 1, théorème des accroissements finis

**Exercice 4.1.**— À l'aide des techniques de Terminale, étudier les limites suivantes. On explicitera les limites classiques utilisées.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\tan 5x}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0,1,+\infty} \frac{2x^3-3x^2+1}{-4x^3+3x+1}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+3}{3x^4+2} e^x, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^4-2x^2)e^{-x}.$$

**Exercice 4.2.**— Calculer les dérivées des fonctions suivantes. Préciser à chaque fois pour quels nombres  $x$  le calcul est valide. Donner une équation de la tangente au graphe pour l'abscisse indiquée entre crochets. Avant de traiter  $f_3$  et  $f_4$  rappeler la formule de la dérivée d'une fonction composée  $f \circ g$ .

$$f_1(x) = \frac{9x^2-4}{8x^3+6} \quad [-1]; \quad f_2(x) = \frac{(x-1)^3}{\sqrt{x}} \quad [1]; \quad f_3(x) = x^3 e^{\sin x} \quad [\pi]; \quad f_4(x) = \ln(\ln(x)) \quad [e].$$

Réponses : les dérivées sont

$$f'_1(x) = -3 \frac{x(6x^3-8x-9)}{(4x^3+3)^2}, \quad f'_2(x) = \frac{(5x+1)(x-1)^2}{2x\sqrt{x}}, \quad f'_3(x) = (3x^2+x^3 \cos x)e^{\sin x}, \quad f'_4(x) = \frac{1}{x \ln x}.$$

**Exercice 4.3.**— Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = \frac{x^2-3x+6}{x-1}$ . Montrer que le graphe de  $f$  admet deux tangentes parallèles à la droite d'équation  $y = -3x$ .

**Exercice 4.4.**— Écrire les développements limités à l'ordre 1 (approximations affines + restes) des fonctions suivantes :

- (1) sinus, cosinus et tangente au point  $a = 0$  ;
- (2) exponentielle au point  $a = 0$  ;
- (3) logarithme et racine carrée au point  $a = 1$ .

**Exercice 4.5.**— Calculer les limites suivantes en utilisant les développements limités.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\tan 5x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{\sin x}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x^2-1}.$$

**Exercice 4.6.**— Pour  $x$  proche de  $-1$ , déterminer le signe de la quantité

$$Q(x) = \frac{2x + \sqrt{x+5}}{\ln(2+x)} - 2$$

En déduire la position des points  $M$  du graphe de  $f(x) = \frac{2x + \sqrt{x+5}}{\ln(2+x)}$  par rapport à la droite horizontale d'équation  $y = 2$  (lorsque l'abscisse de  $M$  est assez proche de  $-1$ ).

---

**Exercice 4.7.**— Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable telle que  $f(0) = 1$  et  $f'(0) = 2$ .

1. Montrer que le graphe de  $f$  passe par le point  $A = (0, 1)$ . Donner une équation de la tangente au graphe  $\Gamma_f$  en  $A$ . Esquisser alors le tracé de  $\Gamma_f$ .

2. Ecrire le DL(1) de  $f$  en 0.

3. Montrer que pour  $x > 0$  assez petit on a  $f(x) > 1 + x$ , et aussi  $f(x) > e^x$ . Comment traduire ces inégalités géométriquement (c'est à dire en termes de graphes de fonctions) ?

---

**Exercice 4.8.**— Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par  $f(x) = 1 + x + \ln|x| - 6 \ln|x+2|$ .

Donner le domaine de définition de  $f$  et tracer son graphe (on précisera les tangentes horizontales et les asymptotes).

---

**Exercice 4.9.**—

1. Pour  $x > 0$ , appliquer le théorème des accroissements finis entre  $x$  et  $x+1$  pour la fonction  $\ln$ . En déduire une majoration de  $\ln(x+1) - \ln(x)$ .

2. En déduire la limite de cette quantité quand  $x$  tend vers  $+\infty$ . Comment s'interprète ce résultat sur le graphe de la fonction  $\ln$  ?

---

**Exercice 4.10.**—

1. Montrer que, pour tous réels  $a$  et  $b$ , on a  $|\sin a - \sin b| \leq |a - b|$ .

2. Interpréter graphiquement le cas où  $b = 0$ .

---

**Exercice 4.11.**—

1. Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable telle l'équation  $f(x) = 1$  admet (au moins) 5 solutions distinctes. Montrer que l'équation  $f'(x) = 0$  admet (au moins) 4 solutions distinctes.

2. Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable telle l'équation  $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$  admet (au moins) 3 solutions distinctes. Montrer que l'équation  $f'(x) = \frac{1}{2}$  admet (au moins) 2 solutions distinctes.

---