
Feuille d'exercices 2

Sup, inf, nombres complexes

Exercice 2.1.— Pour chacun des sous-ensembles de $\mathbb{R}$ suivants, dire en justifiant vos affirmations s'il est majoré, minoré, donner si elles existent sa borne supérieure et inférieure, et préciser s'il possède un maximum et un minimum.

- (a) $\left\{ \left(-\frac{1}{2}\right)^n : n \in \mathbb{N} \right\},$
- (b) $\left\{ 3 + n + \frac{2}{n} + (-1)^n n : n \in \mathbb{N} \right\},$
- (c) $\left\{ n + \frac{1}{p} : n, p \in \mathbb{N}^* \right\},$
- (d) $\left\{ \frac{n-1}{n} : n \in \mathbb{N}^* \right\},$
- (e) $\left\{ \frac{1}{n} + \frac{(-1)^p}{p} : n, p \in \mathbb{N}^* \right\},$
- (f) $\{ q \in \mathbb{Q} : (1 + q^2) \leq 2 \}.$

Exercice 2.2.— Calculer les parties réelles et imaginaires des nombres complexes suivants :

$$(1 - i)^3, \quad \frac{1 + i}{\sqrt{3} + i}, \quad e^{-24i\pi} + e^{3i\pi}.$$

Exercice 2.3.— Calculer le module et l'argument (pris dans $[0, 2\pi[$) des nombres complexes suivants :

$$1 + i, \quad \sqrt{3} + i, \quad 1 - i\sqrt{3}, \quad \frac{1 + i}{\sqrt{3} + i}.$$

En déduire les valeurs de $\cos \pi/12$ et $\sin(\pi/12)$. **Exercice 2.4.**— Déterminer les racines carrées des nombres complexes suivants :

$$15 - 8i, \quad 1 + i, \quad 5 + 12i, \quad 3 - 2i.$$

Exercice 2.5.— Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations du second degré suivantes :

$$\begin{aligned} z^2 + z + 1 &= 0, \\ z^2 - (1 + 2i)z - (1 + i) &= 0, \\ z^2 - 5(1 + i)z + 17i &= 0, \\ 2z^2 + (3 - i)z + 1 - i &= 0. \end{aligned}$$