
Feuille d'exercices 1

Ensembles et logique

Exercice 1.1.— 1. Montrer que $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ et $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

2. Énumérer les éléments de $\{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3, 4\}$.

3. Représenter les sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ suivants :

$$([0, 1] \cup [2, 3]) \times [-1, 1],$$

$$(\mathbb{R} \setminus [0, 1]) \times ((\mathbb{R} \setminus [-1, 1]) \cap [0, 2]).$$

Exercice 1.2.— 1. Écrire la négation de « $P \Rightarrow Q$ ».

2. Écrire à l'aide de quantificateurs l'assertion suivante : « le carré de tout nombre réel est positif »

3. Même question pour « pour chaque réel, je peux trouver un entier relatif tel que leur produit soit strictement plus grand que 1 ».

4. Même question pour « pour tout entier n il existe un unique nombre réel x tel que $\exp(x)$ est égal à n ».

Exercice 1.3.— 1. (raisonnement direct). Soit $a, b \in \mathbb{R}^+$. Montrer que si $a \leq b$ alors

$$a \leq \frac{a+b}{2} \leq b \quad \text{et} \quad a \leq \sqrt{ab} \leq b.$$

2. (disjonction de cas) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'entier $n(n+1)$ est pair (distinguer les cas n pair et n impair).

3. (contraposée ou absurde). Soient $a, b \in \mathbb{Z}$. Montrer que si $b \neq 0$ alors $a + b\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. (Utiliser que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$).

4. (absurde) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\sqrt{n^2 + 1}$ n'est pas un entier.

5. (contre exemple) Est-ce que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $x < 2 \Rightarrow x^2 < 4$?

6. (récurrence) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$ on a

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

7. (récurrence) Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$ on a $(1+x)^n \geq 1+nx$.