

1 Exercice 3

c) $I_5 = \int_0^{\pi/2} (x^2 - 3x + 2) \sin x \, dx$

On fait deux intégrations par parties successives.

Première intégration par parties :

On pose :

$$\begin{aligned} u'(x) &= \sin x & \Rightarrow & u(x) = -\cos x \\ v(x) &= x^2 - 3x + 2 & \Rightarrow & v'(x) = 2x - 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_5 &= \left[-(x^2 - 3x + 2) \cos x \right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} (2x - 3) \cos x \, dx \\ &= 0 - (-2) + \int_0^{\pi/2} (2x - 3) \cos x \, dx \end{aligned}$$

Deuxième intégration par parties pour $\int_0^{\pi/2} (2x - 3) \cos x \, dx$:

On pose :

$$\begin{aligned} u'(x) &= \cos x & \Rightarrow & u(x) = \sin x \\ v(x) &= 2x - 3 & \Rightarrow & v'(x) = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} (2x - 3) \cos x \, dx &= [(2x - 3) \sin x]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} 2 \sin x \, dx \\ &= [(2x - 3) \sin x]_0^{\pi/2} - 2 [-\cos x]_0^{\pi/2} \\ &= [(2x - 3) \sin x + 2 \cos x]_0^{\pi/2} \\ &= \pi - 3 - 2 \\ &= \pi - 5 \end{aligned}$$

Donc

$$I_5 = 2 + (\pi - 5) = \pi - 3$$

$$\boxed{I_5 = \pi - 3}$$

$$\text{d) } I_6 = \int_0^{\pi/2} e^x \cos x \, dx$$

On fait deux intégrations par parties successives.

Première intégration par parties :

On pose :

$$\begin{aligned} u'(x) &= e^x & \Rightarrow & u(x) = e^x \\ v(x) &= \cos x & \Rightarrow & v'(x) = -\sin x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_6 &= [e^x \cos x]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} e^x \sin x \, dx \\ &= -1 + \int_0^{\pi/2} e^x \sin x \, dx \end{aligned}$$

Deuxième intégration par parties pour $\int_0^{\pi/2} e^x \sin x \, dx$:

On pose :

$$\begin{aligned} u'(x) &= e^x & \Rightarrow & u(x) = e^x \\ v(x) &= \sin x & \Rightarrow & v'(x) = \cos x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} e^x \sin x \, dx &= [e^x \sin x]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} e^x \cos x \, dx \\ &= [e^x \sin x]_0^{\pi/2} - I_6 \\ &= e^{\pi/2} - I_6 \end{aligned}$$

On a donc :

$$I_6 = -1 + e^{\pi/2} - I_6$$

$$2I_6 = -1 + e^{\pi/2}$$

$$I_6 = \frac{e^{\pi/2} - 1}{2}$$

$$\boxed{I_6 = \frac{e^{\pi/2} - 1}{2}}$$

e) $I_7 = \int_0^{\pi/3} \tan x \, dx$
 $\int \tan x \, dx = -\ln |\cos x| + C$

$$\begin{aligned} I_7 &= [-\ln |\cos x|]_0^{\pi/3} \\ &= -\ln |\cos(\pi/3)| + \ln |\cos(0)| \\ &= -\ln(1/2) + \ln(1) \\ &= -\ln(1/2) \\ &= \ln 2 \end{aligned}$$

$I_7 = \ln 2$

2 Exercice 4

f) $I = \int_0^{\ln(2)} \frac{4e^{2t} - 2e^{3t}}{1 + e^t} dt$

On pose:

$$u = e^t \quad \Leftrightarrow \quad du = e^t dt \quad \Leftrightarrow \quad dt = \frac{du}{u}$$

$$\begin{aligned} \frac{4e^{2t} - 2e^{3t}}{1 + e^t} dt &= \frac{4u^2 - 2u^3}{1 + u} \cdot \frac{du}{u} \\ &= \frac{4u^2 - 2u^3}{u(1 + u)} du \\ &= \frac{2u^2(2 - u)}{u(1 + u)} du \\ &= \frac{2u(2 - u)}{1 + u} du \end{aligned}$$

On fait la division euclidienne de $2u(2 - u) = 4u - 2u^2$ par $1 + u$:

$$4u - 2u^2 = (1 + u) \cdot q(u) + r$$

Posons $-2u^2 + 4u = (1 + u)(-2u + a) + b$

Développons : $(1 + u)(-2u + a) = -2u + a - 2u^2 + au = -2u^2 + (a - 2)u + a$

En identifiant :

- Coefficient de u^2 : $-2 = -2$
- Coefficient de u : $4 = a - 2$ donc $a = 6$

- Terme constant : $0 = a + b$ donc $b = -6$

Donc :

$$\frac{4u - 2u^2}{1 + u} = -2u + 6 - \frac{6}{1 + u}$$

Donc

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 \left(-2u + 6 - \frac{6}{1 + u} \right) du \\ &= \left[-u^2 + 6u - 6 \ln |1 + u| \right]_1^2 \\ &= \left[-u^2 + 6u - 6 \ln(1 + u) \right]_1^2 \\ &= (8 - 6 \ln 3) - (5 - 6 \ln 2) \\ &= 3 - 6 \ln \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$I = 3 - 6 \ln \frac{3}{2} = 3 + 6 \ln \frac{2}{3}$
