

Correction CC3

Exercice 1.1

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = x^2 - 2x + 1 - \frac{1}{4} \cos x$$

1) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ pour $x \in]0, 2[$

$$f'(x) = 2x - 2 + \frac{1}{4} \sin x$$

$$f''(x) = 2 + \frac{1}{4} \cos x$$

f est deux fois dérivable sur \mathbb{R} et, *a fortiori*, sur l'intervalle $]0, 2[$.

2) Montrer que $|f''(x)| \leq \frac{9}{4}$ pour tout $x \in]0, 2[$

$$|f''(x)| = \left| 2 + \frac{1}{4} \cos x \right| \leq 2 + \frac{1}{4} |\cos x| \quad (\text{Inégalité triangulaire})$$

Pour tout $x \in]0, 2[$, $|\cos x| \leq 1$, donc $|f''(x)| \leq 2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$

3) Montrer que $f(x) \leq \frac{3}{4} - 2x + \frac{9}{8}x^2$ pour tout $x \in]0, 2[$. En déduire que $f(1) < 0$.

La fonction f est continue et dérivable sur $[0, 2]$ et deux fois dérivable sur $]0, 2[$. Selon la formule de Taylor-Lagrange :

$$\forall x \in]0, 2[, \exists c \in]0, x[\text{ t.q. } f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2} f''(c)$$

Donc :

$$f(x) = \frac{3}{4} - 2x + \frac{x^2}{2} f''(c) \leq \frac{3}{4} - 2x + \frac{x^2}{2} |f''(c)| \leq \frac{3}{4} - 2x + \frac{9}{8}x^2$$

Pour $x = 1$: $f(1) \leq \frac{3}{4} - 2 + \frac{9}{8} = -\frac{1}{8} \implies f(1) < 0$.

4) Montrer que la fonction f s'annule au moins une fois sur chacun des intervalles $]0, 1[$ et $]1, 2[$. On énoncera soigneusement le théorème utilisé.

La fonction f est continue sur $[0, 1]$. De plus, $f(0) = \frac{3}{4} > 0$, et $f(1) < 0$ par 3), donc 0 est compris entre $f(0)$ et $f(1)$. Par le Théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins un $c_1 \in [0, 1]$ tel que $f(c_1) = 0$. Comme $f(0)$ et $f(1)$ sont différents de 0, il existe même un tel c_1 dans $]0, 1[$.

Calculons maintenant $f(2)$.

$$f(2) = 1 - \frac{1}{4} \cos(2) > 0,$$

car $-\frac{1}{4} \leq -\frac{1}{4} \cos(2) \leq \frac{1}{4}$.

Similairement, f est continue sur $[1, 2]$ et 0 est strictement entre $f(1)$ et $f(2)$, donc le Théorème des valeurs intermédiaires donne l'existence d'un c_2 dans $]1, 2[$ tel que $f(c_2) = 0$.

5) En déduire que f' s'annule au moins une fois sur l'intervalle $]0, 2[$. On énoncera soigneusement le théorème utilisé.

Fixons un $c_1 \in]0, 1[$ et un $c_2 \in]1, 2[$ tel que $f(c_1) = f(c_2) = 0$ (on sait que de tels c_1, c_2 existent par 4)).

La fonction f est continue sur $[c_1, c_2]$ et dérivable sur $]c_1, c_2[$. De plus, $f(c_1) = f(c_2) (= 0)$. Donc, par le Théorème de Rolle, il existe $c \in]c_1, c_2[\subset]0, 2[$ tel que $f'(c) = 0$. Donc f' s'annule au moins une fois sur $]0, 2[$.

Exercice 1.2

Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$(1+t)x' + x = 1 + \ln(1+t) \quad \text{sur }]-1, +\infty[\quad (1)$$

On commence par diviser par $(1+t)$ pour obtenir la forme standard :

$$x' + \frac{x}{1+t} = \frac{1 + \ln(1+t)}{1+t}$$

Première étape : résolution de l'équation homogène

On résout l'équation homogène associée par séparation des variables, puisque le coefficient devant x n'est pas constant :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\frac{x}{1+t} \\ \frac{dx}{x} &= -\frac{dt}{1+t} \\ \ln|x| &= -\ln|1+t| + C \quad \text{pour } t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \end{aligned}$$

En particulier, pour $t \in]-1, +\infty[$, on obtient

$$\begin{aligned} \ln|x| &= -\ln(1+t) + C \\ |x| &= \frac{e^C}{1+t} \end{aligned}$$

La solution générale de l'équation homogène est donc :

$$x_h(t) = \frac{K}{1+t}, \quad K \in \mathbb{R}$$

Deuxième étape : recherche d'une solution particulière

On cherche ici une solution de l'équation complète (1). Si on n'en trouve pas intuitivement, on peut procéder par variation de la constante.

Variation de la constante

On cherche une solution de la forme :

$$x(t) = \frac{K(t)}{1+t}$$

Calculons $x'(t)$:

$$x'(t) = \frac{K'(t)(1+t) - K(t)}{(1+t)^2}$$

En substituant dans l'équation initiale :

$$\begin{aligned}(1+t) \cdot \frac{K'(t)(1+t) - K(t)}{(1+t)^2} + \frac{K(t)}{1+t} &= 1 + \ln(1+t) \\ \frac{K'(t)(1+t) - K(t)}{1+t} + \frac{K(t)}{1+t} &= 1 + \ln(1+t) \\ \frac{K'(t)(1+t)}{1+t} &= 1 + \ln(1+t) \\ K'(t) &= 1 + \ln(1+t)\end{aligned}$$

Intégrons pour trouver $K(t)$:

$$K(t) = \int [1 + \ln(1+t)] dt = t + \int \ln(1+t) dt$$

Pour calculer $\int \ln(1+t) dt$, on commence par poser $s = 1+t$, alors, et on fait une intégration par parties.

$$\int \ln(1+t) dt = \int \ln(s) ds$$

On pose :

$$\begin{aligned}u &= \ln(s) & \Rightarrow & du = \frac{ds}{s} \\ dv &= 1 & \Rightarrow & v = s\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \ln(s) ds &= s \ln(s) - \int s \cdot \frac{ds}{s} \\ &= s \ln(s) - \int 1 ds \\ &= s \ln(s) - s + C, \quad C \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

En remplaçant $s = 1+t$:

$$\begin{aligned}\int \ln(1+t) dt &= s \ln(s) - s + C \\ &= (1+t) \ln(1+t) - (1+t) + C \\ &= (1+t) \ln(1+t) - 1 - t + C\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}K(t) &= t + (1+t) \ln(1+t) - 1 - t + C \\ &= (1+t) \ln(1+t) + C'\end{aligned}$$

Une solution particulière est donc :

$$x_p(t) = \frac{(1+t) \ln(1+t)}{1+t} = \ln(1+t)$$

Solution générale

La solution générale de l'équation différentielle est la somme de la solution homogène et d'une solution particulière :

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = \frac{K}{1+t} + \ln(1+t)$$