# CC 3

Le 8 décembre 2025.

**Exercice 1.1.—** Soit $f$ la fonction définie par

$$f(x) = x^2 - 2x + 1 - \frac{1}{4}\cos x.$$

(1) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ pour $x \in ]0, 2[$.

(2) Montrer que $|f''(x)| \leq \frac{9}{4}$ pour tout $x \in ]0, 2[$.

(3) Montrer que $f(x) \leq \frac{3}{4} - 2x + \frac{9}{8}x^2$, pour tout $x \in ]0, 2[$. En déduire que $f(1) < 0$.

(4) Montrer que la fonction $f$ s'annule au moins une fois sur chacun des intervalles $]0, 1[$ et $]1, 2[$. On énoncera soigneusement le théorème utilisé.

(5) En déduire que $f'$ s'annule au moins une fois sur l'intervalle $]0, 2[$. On énoncera soigneusement le théorème utilisé.

**Exercice 1.2.—** On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad x''(t) - 4x'(t) + 5x(t) = \sin t.$$

1) Résoudre l'équation homogène associée.
2) Résoudre l'équation $(E)$. On cherchera d'abord une solution particulière de $(E)$.
3) Déterminer l'unique solution de $(E)$ telle que $x(0) = x'(0) = 0$.

**Exercice 1.3.—**
Soit $f : \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[ \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = (1 + 2x)^{\frac{1}{2}}$.
1) Calculer $f'$, $f''$, $f'''$. Montrer que

$$0 \leq f'''(x) \leq 3, \quad \text{pour } x \in [0, +\infty[.$$

2) Montrer que :

$$1 + x - \frac{x^2}{2} \leq f(x) \leq 1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2}, \quad \forall x \in [0, +\infty[.$$

**Exercice 1.4.—**
Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = (1 + x)^{-1/3}$.

(1) Calculer $f'$, $f''$, $f'''$.

(2) Montrer que

$$1 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}x^2 - \frac{14}{81}x^3 \leq (1 + x)^{-1/3} \leq 1 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}x^2, \quad \forall x \geq 0.$$

**Exercice 1.5.—**
Soit $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable. On suppose que $f(a) = 0$, que $f(b) = 0$ et que $f'' < 0$. Démontrer que pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) > 0$.

**Exercice 1.6.—**
Démontrer les inégalités suivantes :

(1) $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $|\arctan(x) - \arctan(y)| \leq |x - y|$.

(2) $\forall x \geq 0$, $x \leq e^x - 1 \leq xe^x$.

**Exercice 1.7.—**

Résoudre les équations différentielles suivantes :

(1) $y' + y = \frac{1}{1+e^x}$ sur $\mathbb{R}$ ;

(2) $(1+x)y' + y = 1 + \ln(1+x)$ sur $]-1, +\infty[$ ;

(3) $y' - \frac{y}{x} = x^2$ sur $[0, +\infty[$.