CC 2

Le 17 novembre 2025.

Exercice 1.1.— Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $[0,1]$ avec f' continue sur $[0,1]$ telle que

$$f(0) = 0,\ f(1) = 1,\ f'(0) = 0,\ f'(1) = 0.$$

On définit la fonction $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ par

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0. \end{cases}$$

1) Montrer que g est continue sur $[0,1]$.
2) Montrer que g est dérivable sur $]0,1]$ et calculer la fonction g'.

Exercice 1.2.—
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

1) La fonction f est-elle continue ? Justifier
2) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Justifier
Indication : traiter séparément le cas $x = 0$.

Exercice 1.3.— On considère la courbe paramétrée dans le plan définie par

$$\begin{cases} x(t) = t + \dfrac{4}{t}, \\ y(t) = \dfrac{t}{3} + 2 + \dfrac{3}{t+1}. \end{cases}$$

1) Déterminer le domaine de définition D de la fonction $t \mapsto X(t) = (x(t), y(t))$. On notera par $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ la courbe image $\gamma = \{(x(t), y(t)) : t \in D\}$.

2) Tracer le tableau de variation conjoint de $x(t)$ et $y(t)$.

3) On rappelle qu' un point singulier d' une courbe paramétrée est un point $X(t_0)$ de la courbe à t_0 est tel que $x'(t_0) = y'(t_0) = 0$.

Déterminer les tangentes horizontales, verticales, et les points singuliers de la courbe γ.

4) Déterminer les asymptotes à la courbe γ.

5) On pose $t = 2 + s$. Déterminer les développements limités à l' ordre 2 en $s = 0$ des fonctions $s \mapsto x(2+s)$ et $s \mapsto y(2+s)$.

En déduire la limite

$$\lim_{t \to 2} \frac{y(t) - y(2)}{x(t) - x(2)}.$$

Exercice 1.4.—
On considère la courbe paramétrée C donnée par

$$M(t) = (x(t), y(t)), \quad x(t) = \frac{t^3}{t^2 - 9}, \quad y(t) = \frac{t(t-2)}{t-3}.$$

1) Donner le domaine de définition maximal D de $M(t)$, et déterminer les limites de $x(t)$ et $y(t)$ aux extrémités de D.

2) Etudier les branches infinies de C.

Exercice 1.5.—

Les fonctions suivantes sont-elles dérivables au point indiqué ? Justifier

$$f(x) = \frac{x}{1+|x|} \text{ en } 0, \quad g(x) = \begin{cases} (x-1) & \text{si } x \leq 1 \\ (x-1)^2 & \text{si } x > 1 \end{cases} \text{ en } 1, \quad h(x) = |x| \sin x \text{ en } 0.$$

Exercice 1.6.—

Calculer le DL de $f : x \mapsto exp(cos(x))$ en 0 à l'ordre 4

Exercice 1.7.—

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} (2x-1)^2 & \text{si } x \geq 1 \\ sin(\pi x) + 1 & \text{si } < 1 \end{cases}$$

(1) La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Justifier

(2) Écrire (sans justifier) les fonctions dérivées de $sin(\pi x) + 1$ et $(2x-1)^2$. En déduire la dérivée à gauche resp. à droite de la fonction f en 1. La fonction f est-elle dérivable en 1 ? Justifier