Institut Villebon Georges Charpak

Remobilisation **L2 2025/2026**

Séance 1 : mercredi 3 septembre 2025

Dimensions, unités, homogénéité, ordres de grandeur, conversions

Il y a toujours au moins une bonne réponse, pas forcément unique.

Q1a. Parmi les expressions suivantes, identifier celle qui n'est pas d'une surface.
On donne $[r]$ = $[h]$ = L. Attribuer un objet et ses paramètres à chaque surface.

$$A = r.h$$

$$B = \pi r^2$$

$$C = 2\pi r$$

$$D = 4\pi r^2$$

$$E = 2\pi r.h$$

Q1b. Parmi les expressions suivantes, identifier celle qui n'est pas d'un volume.
On donne $[r]$ = $[h]$ = L. Attribuer un objet et ses paramètres à chaque volume.

$$A = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$B = \pi r^2.h$$

$$C = 2\pi rh$$

$$D = 2\pi r^2.h$$

Q2.a. Soit un cube d'arête 2 cm en bois. Quel est son volume ?

A. 4 cm^3
B. 8 cm^3
C. 80 mm^3
D. 4000 mm^3

Q2.b. On s'intéresse à la masse d'un cube du même bois, mais d'arête 4 cm. Par rapport à la masse du petit cube, elle

A. Double
B. Triple
C. Est égale à la masse du petit cube élevée au carré
D. Est multipliée par 8

Q3. Quel est le rayon d'une sphère de 4 cm^3 ?

A. 1,59 cm
B. 1,77 cm
C. 0,985 cm
D. 1 cm

Q4. Une sphère pleine de cuivre a une masse de 0,475 g. La masse volumique du cuivre est de 8900 $kg.m^{-3}$. Quel est le rayon de la sphère ?

A. 2,3 mm
B. 23 mm
C. 0,23 mm

Q5. Ordre de grandeur du rayon de la Terre :

A. 1000 km
B. 10 000 km
C. 100 000 km

Q6. Ordre de grandeur de la surface corporelle d'un adulte :

A. 10 m^2
B. 100 cm^2
C. 1 m^2
D. 1000 cm^2

Q7. La masse surfacique du papier ordinaire (on parle alors de grammage) est de 80 g/m^2. Cela correspond à :

A. 8 mg/cm^2
B. 0,8 kg/m^2
C. 80 kg/km^2
D. 80 $tonnes/km^2$

Q8. Une année lumière c'est égal à :

A. 365,25 jours
B. $9{,}47.10^{15}$ m
C. $9{,}47.10^{13}$ cm
D. $9{,}47.10^{17}$ cm

Q9. L'Ångström (symbole Å) est une unité de mesure utilisée en physique atomique.
1 Å = 0,1 nm. Vérifier les conversions suivantes :

A. 10 Å = 10^{-9} m
B. 10 Å = 1 nm
C. 10 Å = 10^{-10} m
D. 10 Å = 10^{9} m

Q10. La masse volumique de l'eau est égale à :

A. 0,1 $kg.cm^{-3}$
B. 1 $kg.L^{-1}$
C. 10 $kg.m^{-3}$
D. 10^3 $kg.m^{-3}$
E. 1 $g.cm^{-3}$

Q11. 1 µm = 1 micromètre = 1 micron = 10^{-3} mm. Vérifier les conversions suivantes :

A. 10 µm = 10^{-5} m
B. 10 µm = 10^{-7} m
C. 10 µm = 10^{-4} cm
D. 10 µm = 10^{-3} cm

Dérivées partielles

Soit la fonction de plusieurs variables $u = f(x, y, z)$.

Si u est continue au point (x_0, y_0, z_0) et si la fonction de x seul $f(x, y_0, z_0)$ admet une dérivée pour $x = x_0$, on dit que u admet une dérivée partielle par rapport à x au point (x_0, y_0, z_0). La **dérivée partielle par rapport à $\boldsymbol{x}$** se calcule donc en considérant les autres variables comme des constantes, et se note $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z}$ ou plus simplement $\frac{\partial f}{\partial x}$ (prononcer "d rond f sur d rond x"). Les deux autres dérivées partielles s'écrivent $\frac{\partial f}{\partial y}$ et $\frac{\partial f}{\partial z}$.

Exemple :

Soit une fonction $f(x, t) = \ 3x + t$ qui dépens de deux variables x et t. On peut étudier les variations de la fonction quand on fait varier x à t constant.

- Ainsi la dérivée partielle de f par rapport à x est $\frac{\partial f}{\partial x} = 3$

- De même, la dérivée partielle de f par rapport à t est $\frac{\partial f}{\partial t} = 1$

On appelle **différentielle totale exacte $\boldsymbol{df}$** d'une fonction $f(x, y, z, t \dots)$ l'expression :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial t}dt + \cdots$$

où les dx, dy, dz, dt... sont des **variations infinitésimales** des variables x, y, z, t...

Exercices :

1) Calculer la différentielle totale de $E_m = E_c + E_p$ sachant que $E_c = \frac{1}{2}mv^2$ et $E_p = mgh$.

2) Une mole de gaz de Van der Waals a pour équation d'état : $\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT$ où P,V et T sont respectivement la pression, le volume molaire et la température du gaz. R est la constante des gaz parfaits, a le terme de cohésion (constant), b le covolume molaire (constant). Ces deux derniers paramètres rendent compte pour a, que les molécules interagissent entre elles, et pour b, que leur volume est fini.

Exprimer P en fonction de T et V et calculer les dérivées partielles : $\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T$ et $\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V$.

Gradient d'une fonction scalaire

Soient $M(x, y, z)$ un point, et u une fonction liée à la position de ce point (comme par exemple sa vitesse). Cette fonction est supposée continue, et admet d'autre part des dérivées partielles par rapport à x, y, et z. Si le point M vient occuper une position voisine très proche M' $(x + dx, y + dy, z + dz)$, u subit une variation du donnée par :

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$$

dx, dy et dz sont les composantes du vecteur $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{dM} = dx.\vec{\imath} + dy.\vec{\jmath} + dz.\vec{k}$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

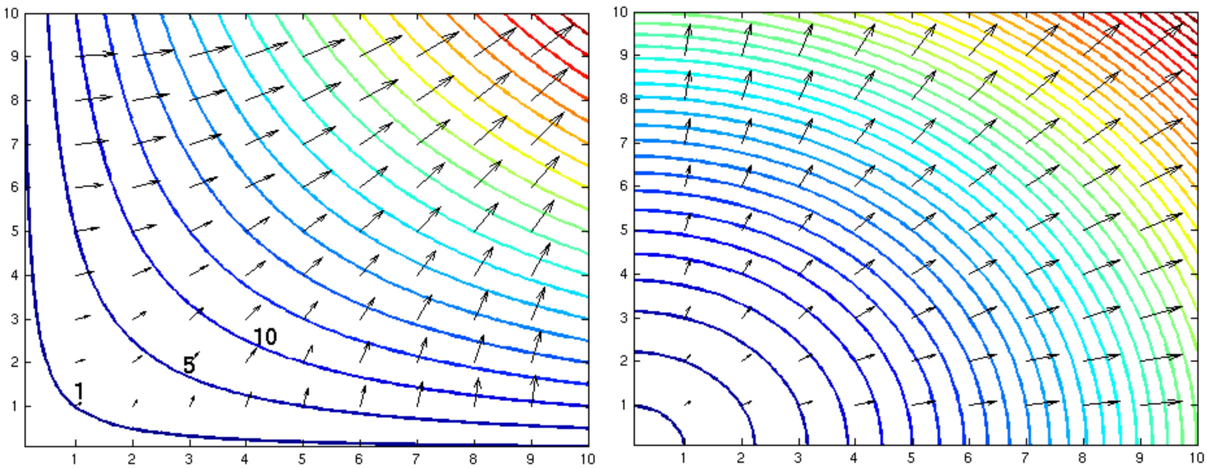
On peut considérer que les trois dérivées partielles sont les composantes d'un certain vecteur et que du est le produit scalaire de ce vecteur par $\overrightarrow{dM}$. On écrit alors :

$$du \ = \ \overrightarrow{grad}(u) \, . \overrightarrow{dM}$$

(prononcer "gradient de u scalaire dM"). On définit alors **le gradient de la fonction u** par :

$$\overrightarrow{grad}(u) = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{\imath} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{\jmath} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k}$$

Exemples : champs scalaires (couleur, valeurs élevées en rouge) et leur gradient (flèches). Chaque ligne est une courbe de niveau où la valeur de f est constante.



$f(x, y) = xy$ $\qquad\qquad$ $f(x, y) = x^2 + y^2$

Le gradient indique à la fois le taux de variation de f (par sa norme, ici longueur de la flèche), et la direction de « plus grande pente ». Il est dirigé localement vers les valeurs élevées de f, et orthogonal aux courbes de niveau.

Exercices :

1) Sur le graphe de la fonction $f(x, y) = xy$, 1, 5 et 10 sont indiqués.

A quoi correspondent-ils ? Donner quelques couples (x, y) correspondant.

Calculer le gradient de $f(x, y)$.

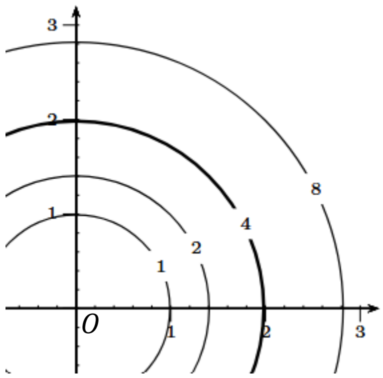
Calculer sa valeur (sa norme) en deux points de la courbe de niveau 10.

Conclusion.

2) Sur le graphe ci-contre, marquer le point M de coordonnées $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Quelle est l'équation de la courbe de niveau de $f(x, y) = x^2 + y^2$, passant par ce point ?

Quelle forme a cette courbe ?

Calculer le vecteur gradient en ce point et tracer ce vecteur sur la figure. Qu'observez-vous ?



Séance 2 : lundi 8 septembre 2025 **Nom :…………………………………………………..**

Vecteurs, coordonnées, trigonométrie

Ces questions sont à résoudre et à rendre sur cette feuille pour mercredi 10 septembre.

Q1. Calculer la norme du vecteur $2\vec{\imath} + 3\,\vec{\jmath} - \vec{k}$.

Q2. Soit le point M de coordonnées cartésiennes dans le plan (4 ; 2).
Quelles sont ses coordonnées polaires (r, θ) ?

Q3. Soit le point M de coordonnées polaires (5 ; 30°).
Quelles sont ses coordonnées cartésiennes (x, y) ?

Q4. Calculer le produit scalaire de $\vec{v} = 2\vec{\imath} + 3\,\vec{\jmath} - \vec{k}$ et $\vec{w} = -2\vec{\imath} + \vec{\jmath} - \vec{k}$.

Que peut-on dire de ces deux vecteurs ?

Q5. On repère le point M sur un cercle de centre O : $\overrightarrow{OM} = 2\vec{u_r}$. Exprimer sa vitesse en composantes polaires.

Q6. Faire le produit vectoriel des deux vecteurs $\vec{u} = \vec{\imath} + 2\,\vec{\jmath}$ et $\vec{v} = 2\vec{\imath} - 2\,\vec{\jmath}$.
Représenter $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{u} \wedge \vec{v}$ dans un plan muni d'un repère. Pour $\vec{u} \wedge \vec{v}$, on utilisera le symbole approprié.

Q7. Calculer la norme du produit vectoriel de deux vecteurs sachant que leur norme est 2 pour l'un et 3 pour l'autre et que l'angle qu'ils font entre eux est de 30°.

Q8. Convertir en degrés θ= 1 rad.

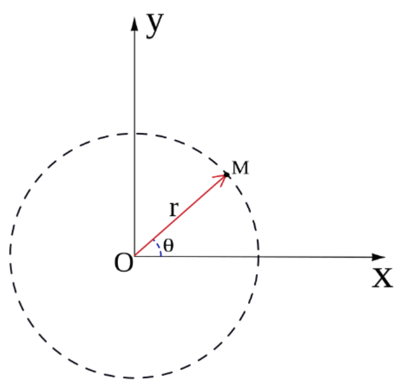
Q9. Convertir en radians θ = 100°.

Q10. Donner la dérivée des trois fonctions trigonométriques sin, cos et tan.

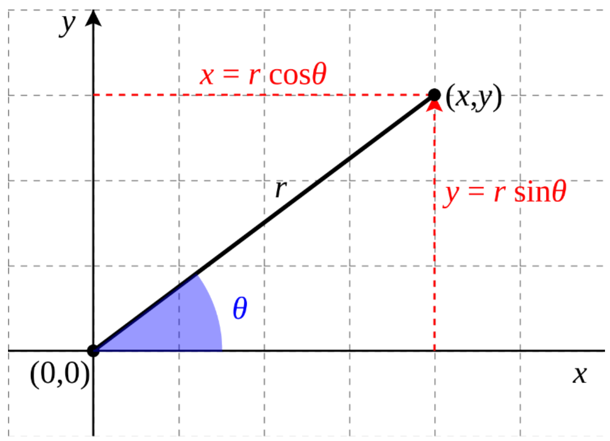
Systèmes de coordonnées

Coordonnées polaires

En coordonnées polaires, la position du point M est définie par la distance r et l'angle θ.



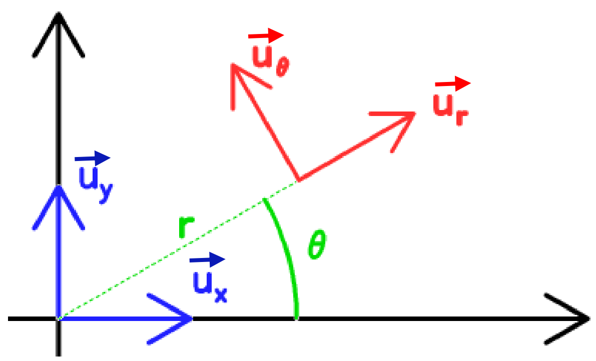
Conversion entre systèmes polaire et cartésien :



- Compléter en donnant l'expression des coordonnées polaires en fonction des coordonnées cartésiennes.

  $r =$

  $\theta =$



- Exprimer les vecteurs unitaires du repère cartésien $\vec{u_x}$ et $\vec{u_y}$ en fonction des vecteurs unitaires de la base tournante $\vec{u_r}$ et $\vec{u_\theta}$.

$\overrightarrow{u_x}$ =

$\overrightarrow{u_y}$ =

- Exprimer $\overrightarrow{u_r}$ et $\overrightarrow{u_\theta}$ en fonction de $\overrightarrow{u_x}$ et $\overrightarrow{u_y}$.

$\overrightarrow{u_r}$ =

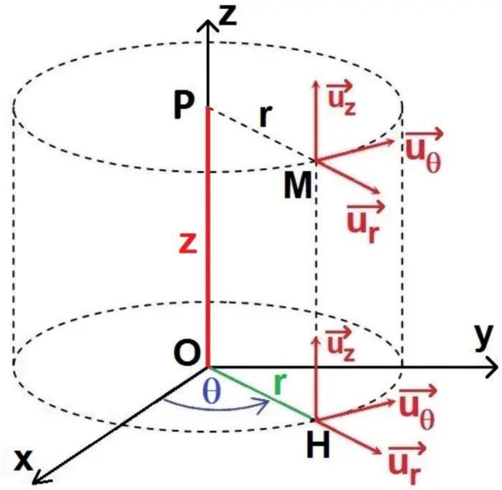
$\overrightarrow{u_\theta}$ =

sources : wikipedia.org/wiki/Coordonnées_polaires

www.methodephysique.fr/coordonnees_cartesiennes_cylindriques_spheriques/

Coordonnées cylindriques

Les coordonnées cylindriques correspondent aux coordonnées polaires mais en ajoutant l'axe z, qui est le même qu'en coordonnées cartésiennes :



r est le rayon du cylindre fictif sur lequel se trouve M.

θ est la position angulaire de M sur le cercle de rayon r.

z est la hauteur du cylindre.

Les coordonnées cylindriques du point M sont (r, θ, z), celles du point H (r, θ, 0).

- Donner l'expression des coordonnées cartésiennes en fonction des coordonnées cylindriques :

  x =

  y =

  z =

- De même, donner l'expression des coordonnées cylindriques en fonction des coordonnées cartésiennes :

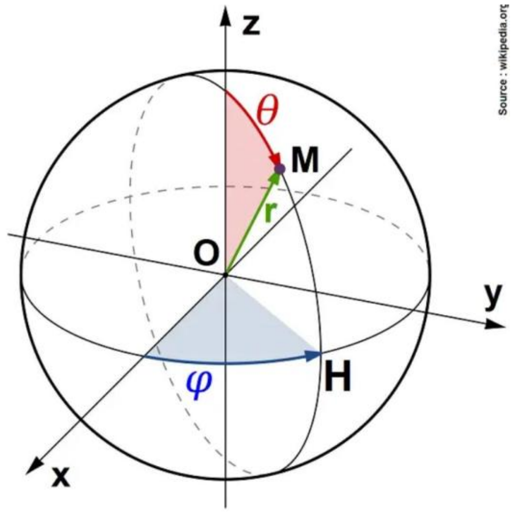
  r =

  θ =

  z =

Coordonnées sphériques

Les coordonnées sphériques font intervenir r, qui est la distance OM, et 2 angles θ et ϕ, selon le schéma suivant :



r est le rayon de la sphère fictive sur laquelle se trouve M.

θ est la colatitude : elle se mesure en partant de l'axe des pôles, contrairement à la latitude qui part du plan de l'équateur.

$$0 < \theta < \pi$$

ϕ est la longitude.

$$0 < \phi < 2\pi$$

Les coordonnées sphériques du point M sont (r, θ, ϕ).

Le point H est la « projection circulaire » sur le plan (O, x, y).

Attention : l'angle ϕ correspond à l'angle θ des coordonnées polaires ou cylindriques !!!
r correspond à la longueur OM et non plus à la longueur OH comme en cylindriques.

- Donner l'expression des coordonnées cartésiennes en fonction des coordonnées sphériques :
  x =

  y =

  z =

- De même, donner l'expression des coordonnées sphériques en fonction des coordonnées cartésiennes :
  r =

  θ =

  ϕ =

Séance 3 : mercredi 10 septembre

Rendre la feuille **Vecteurs, coordonnées, trigonométrie**

Finir **Système de coordonnées**

Séance 4 : vendredi 12 septembre

Equations différentielles

Vocabulaire

- **Qu'est-ce que c'est ?** Equations liant les dérivées (temporelles en physique) $\dot{x}(t)$, $\ddot{x}(t)$ de l'inconnue $x(t)$.

On cherche $\boldsymbol{x(t)}$**.**

- Equation différentielle du **premier ordre** : contient $x(t)$ et $\boldsymbol{\dot{x}(t)}$ (pas de $\ddot{x}(t)$).
- Equation différentielle du **second ordre** : contient $x(t)$, $\dot{x}(t)$ et $\boldsymbol{\ddot{x}(t)}$.
- Equation **à coefficients constants** : les facteurs multipliant $x(t)$, $\dot{x}(t)$ et $\ddot{x}(t)$ sont constants = indépendants du temps.
- Equation différentielle **linéaire** : $x(t)$, $\dot{x}(t)$ et $\ddot{x}(t)$ sont à la puissance 1. Pas de $x^2(t)$ ni de $\dot{x}^2(t)$ etc

Conséquence : la somme de deux solutions est aussi solution.

Méthode

- Mettre les termes de l'équation dans **l'ordre décroissant des dérivées** et s'arranger par le calcul pour que le coefficient de la dérivée la plus haute soit **égal à 1**.
- Mettre le terme **constant** de l'autre côté du signal =.

$\Longrightarrow$ pour le 1er ordre : $\dot{x}$ +ax = b

$\Longrightarrow$ pour le 2nd ordre : $\ddot{x}$ + a$\dot{x}$ +bx = c

Résolution : d'abord résoudre l'équation **homogène,** c'est-à-dire sans second membre.

$\Longrightarrow$ c'est la **solution générale**.

puis résoudre l'équation **complète**, c'est-à-dire avec second membre.

$\Longrightarrow$ c'est la **solution particulière** qui a la même forme que le second membre.

La **solution** c'est la somme des deux. On utilisera les **conditions initiales** s'il reste des paramètres inconnus dans la solution.

$\Longrightarrow$ il faut donc **connaître** les solutions générales.

$\Longrightarrow$ il faut donc **reconnaître** les équations différentielles.

Exemple

L'équation de l'**oscillateur harmonique** : $\boxed{\boldsymbol{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0}}$

C'est une équation homogène du 2nd ordre.

Solution du type $\boxed{\boldsymbol{x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)}}$ ou $\boxed{\boldsymbol{x(t) = C\cos(\omega_0 t + \varphi)}}$

où (A, B) et (C, φ) sont déterminés grâce aux conditions initiales.