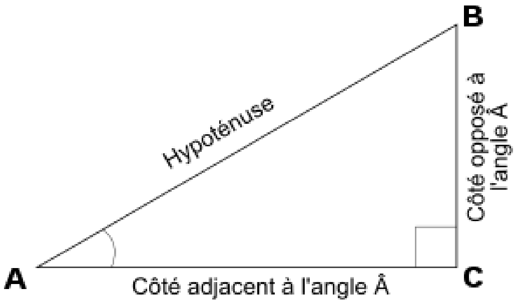
Le TD suivant est uniquement un cours.
Les exercices sont tous à faire sur Ecampus sans calculatrice.
A termes, tous les exercices doivent être fait sans documents, ni calculatrices.
Dans le DS, le cercle trigonométrique ne sera pas donné. Il est donc nécessaire de savoir refaire le cercle trigonométrique.

I / RAPPEL DES PROPRIETES D'UN UN TRIANGLE RECTANGLE

Dans un triangle ABC rectangle en A, on peut calculer les cosinus, sinus et tangente :



$$\boxed{\text{Sin } \widehat{A} = \frac{\text{Côté opposé}}{\text{hypoténuse}} = \frac{BC}{AB}}$$

$$\boxed{\text{Cos } \widehat{A} = \frac{\text{Côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \frac{AC}{AB}}$$

$$\boxed{\text{Tan } \widehat{A} = \frac{\text{Sin } \widehat{A}}{\text{Cos } \widehat{A}} = \frac{\text{Côté opposé}}{\text{Côté adjacent}} = \frac{BC}{AC}}$$

II / Le RADIAN

<u>Définition :</u> Le radian est une unité de mesure des angles de façon que l'angle plat (180°) mesure π radians.

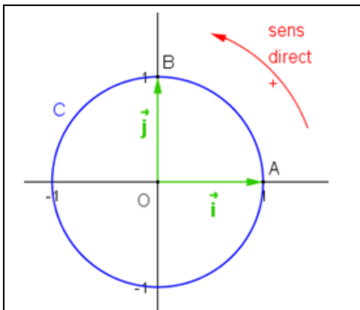
<u>Tableau de conversion radians/degrés :</u>

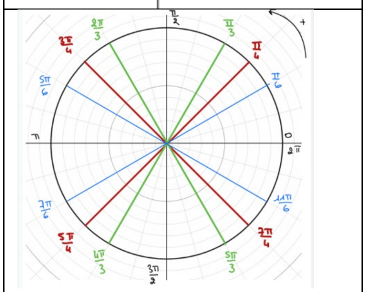
$\boxed{180 \times y = \pi \times x}$

Degrés	180	x
Radians	π	y

<u>Exemple 1 :</u> A faire sur Ecampus.
1. Convertir 45° en radians : 180 * y = π * 45 ⇔ y = π * 45 / 180 = π /4
2. Convertir 2π/3 rad en degrés : 180 * 2 π /3 = π * x ⇔ $x = \frac{180 \times 2 \times \pi}{3 \times \pi} = 120°$

III / LE CERCLE TRIGONOMETRIQUE





<u>Définition :</u>
Soit (O ; I ; J) un repère orthonormé. Le cercle trigonométrique est le cercle de centre O et de rayon 1 <u>orienté</u> dans le sens direct (sens contraire des aiguilles d'une montre).

<u>Propriété :</u>
Pour tout réel x et tout entier relatif k, les points $M(x)$ et $M(x + 2k\pi)$ sont confondus sur le cercle.

<u>Définition :</u>
La mesure principale d'un angle est sa mesure en radians dans l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi]$.

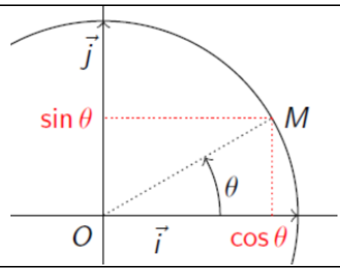
<u>Remarque :</u>
Plusieurs angles peuvent correspondre au même point sur le cercle trigonométrique.

III / COSINUS ET SINUS

Soit M un point du cercle tel que $\hat{x} = \widehat{IOM}$

- On appelle **cosinus de x et on note cos x,** l'abscisse du point M.
- On appelle **sinus de x et on note sin x,** l'ordonnée du point M.

M a donc pour coordonnées (cos x ; sin x).



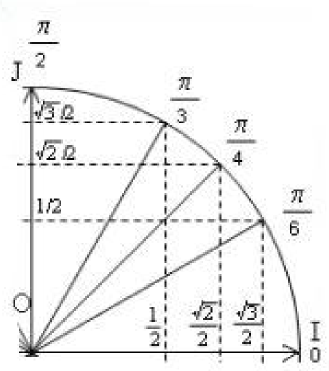


Tableau des valeurs principales du sinus et du cosinus : Par cœur

x (en rad)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
Cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
Sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

IV / PROPRIETES COMPLEMENTAIRES

Propriétés élémentaires :

Soient x un angle en radian et k un nombre relatif.

- $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$; 2π forme un tour.
- $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$
- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$;
- $-1 \leq \cos x \leq 1$;
- $-1 \leq \sin x \leq 1$

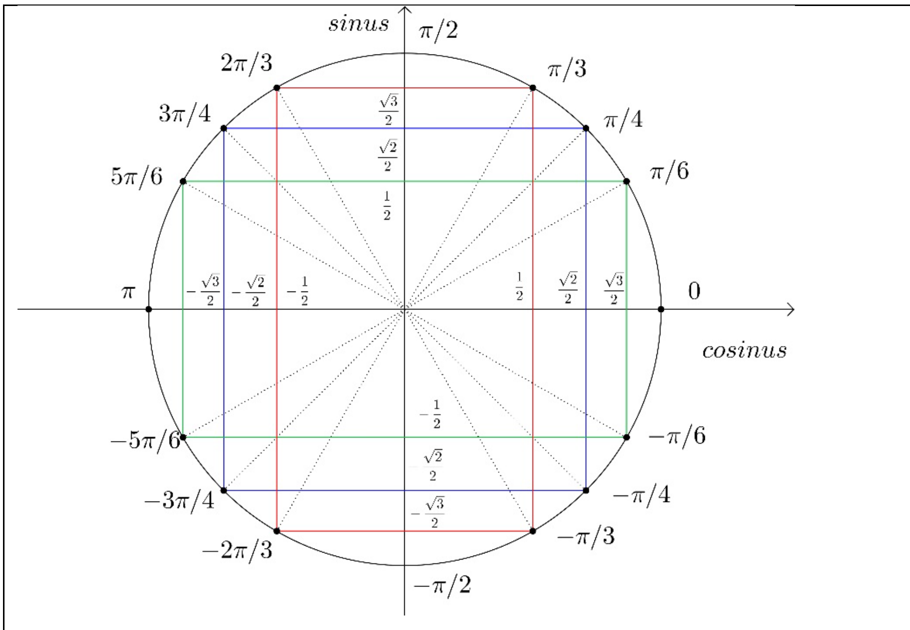
V / LES FORMULES D'ADDITION

Formule d'addition :

$$\cos(a + b) = \cos(a) \times \cos(b) - \sin(a) \times \sin(b)$$
$$\cos(a - b) = \cos(a) \times \cos(b) + \sin(a) \times \sin(b)$$
$$\sin(a + b) = \sin(a) \times \cos(b) + \cos(a) \times \sin(b)$$
$$\sin(a - b) = \sin(a) \times \cos(b) - \cos(a) \times \sin(b)$$

Exercice 4, exemple :

A partir des valeurs particulières connues, trouver par symétrie le sinus et le cosinus de l'angle 210° = $\frac{7\pi}{6}$ radians.



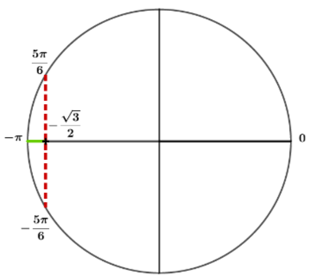
$\cos(\frac{7\pi}{6}) = -\cos(\frac{\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin(\frac{7\pi}{6}) = -\sin(\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$

Exercice 5, exemple :

Soit x un angle en radian de [−π ; π]. Pour **chaque question**, vous ferez un cercle trigonométrique.

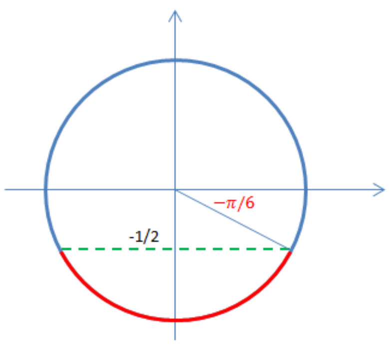
1. Quelles sont les solutions de l'équation $\cos(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$?



Cos $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Donc x = 5π/6 ou x = -5π/6.

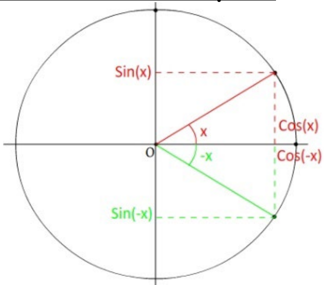
2. Quelles sont les solutions de l'équation $\sin(x) = -\frac{1}{2}$?



Sin $x = -\frac{1}{2}$

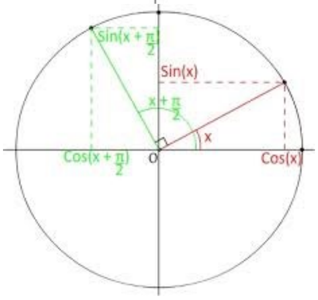
Donc x = -π/6 ou x = -5π/6.

Exercice 7, exemple :



$\sin(-x) = -\sin x$

$\cos(-x) = \cos x$

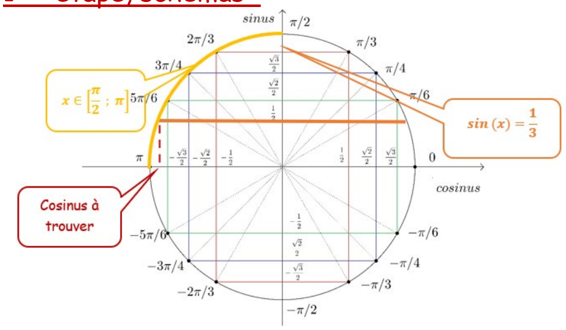


$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$

$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$

Exercice 9, exemple : Soit x un angle en radian de $[\pi/2 \, ; \pi]$ et $\sin(x) = 1/3$. Calculer la valeur exacte du cos (x).

1ière étape, schémas :



2ième étape, signe du sinus :

$x \in [\pi/2 \, ; \pi]$ donc $\cos x < 0$

3ième étape, calculs :

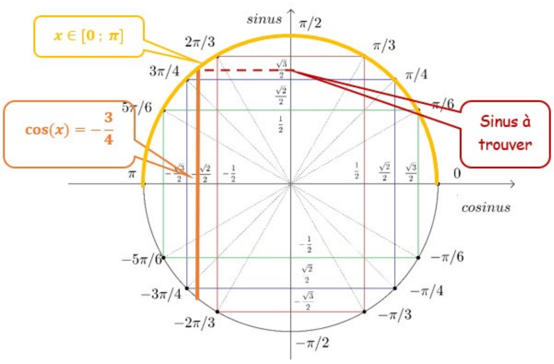
$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$\Leftrightarrow \quad \cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - (1/3)^2 = 1 - 1/9 = 8/9$

Or $\cos x < 0$ Donc $\cos x = \boxed{-\frac{2\sqrt{2}}{3}}$

Exercice 9 bis, exemple : Soit x un angle en radian de $[0 \, ; \pi]$ et $\cos(x) = -3/4$. Calculer la valeur exacte de sin (x).

1ière étape, schémas :



2ième étape, signe du sinus :

$x \in [0 \, ; \pi]$ donc $\sin x > 0$

3ième étape, calculs :

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$\Leftrightarrow \quad \sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - (3/4)^2 = 1 - 9/16 = 7/16$

Or $\sin x > 0$ Donc $\sin x = \boxed{\frac{\sqrt{7}}{4}}$