Université Orsay-Paris-Saclay — Année 2024–2025

LDD/S6 MDD354 Structures algébriques : Graphes, groupes, algèbre linéaire, topologie …

Corrigé Des exercices II.7

II.7 . –Exercices

II.7.1 . –Magmas, groupes

Exercice II.7.1.1 Faire les détails de la preuve de la proposition II.4.5.14.

Solution

II.4.5.14.i Si ϵ et ϵ' sont neutres, alors

$$\epsilon = \epsilon * \epsilon' = \epsilon' .$$

II.4.5.14.ii Si y et z sont des symétriques de x pour $*$,

$$x * y = y * x = x * z = z * x = \epsilon .$$

Il s'ensuit que

$$y = y * \epsilon = y * (x * z) = (y * x) * z = \epsilon * z = z .$$

Exercice II.7.1.2 Étant doné un morphisme $f : M \to N$, (de *magmas associatifs* ,) montrer que :

1) si ϵ est l'*élément neutre* de M son image $f(\epsilon)$ n'est pas nécessairement l'*élément neutre* de N ;

Solution

C'est un contre exemple qui n'est pas particulièrement immédiat à construire parce que cette propriété est en fait souvent vraie. Nous ne connaissons pas nécessairement beaucoup d'exemples de magmas qui ne soient pas des groupes ; et dans le cas des groupes l'image de l'élément neutre est l'élément neutre .
Même quand un magma n'est pas un groupe l'ensemble $\mathbb{N}$ pour l'addition par exemple, il s'injecte naturellement dans un groupe $\mathbb{Z}$ et les morphismes de magma vont naturellement s'étendre en morphisme de groupes , envoyant neutre sur neutre ; et interdisant du même coup de construire un contre exemple.
Le fait de pouvoir se plonger dans un groupe correspond, pour un magma, ou à tout le moins pour un monoïde, à la propriété d'être intègre. Si l'on y déroge, on peut espérer construire un contre exemple.
Soit $M = \mathbb{R}$ muni de la multiplication (ou tout autre anneau bien sûr) et $N = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ muni de la multiplication $(x, y) * (z, t) = (x * z, y * t)$. Pour cette dernière loi l'élément neutre est $(1, 1)$.
Considérons enfin l'application

$$\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R} , \ x \mapsto (x, 0) .$$

On a bien entendu

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \ \phi(x * y) = (x * y, 0) = (x, 0) * (y, 0) = \phi(x) * \phi(y)$$

ce qui assure que ϕ est un morphisme de magma. Cependant

$$\phi(1) = (1, 0) \neq (1, 1) .$$

2) si y est le symétrique de x dans M, $f(y)$ n'est pas nécessairement le symétrique de $f(x)$ dans N.

Solution

Cette propriété est fortement liée à la précédente. En reprenant les notations ci-dessus, pour $x \neq 0$, $\frac{1}{x}$ est le symétrique de x dans M. Or $\phi(x) = (x, 0)$ n'a tout simplement pas de symétrique dans N, ce ne peut donc, a fortiori être $\phi(\frac{1}{x})$.

Exercice II.7.1.3 Donner la preuve de la proposition II.4.5.21.

Solution

II.4.5.21.i *Ceci revient à dire que $f *_{M^E} g$ est une application bien définie de E dans M*

$$\forall (f,g) \in M^E \times M^E, \ ;$$

ce qui est clair.

II.4.5.21.ii *Si on veut que $f \mapsto f(x)$ soit un morphisme, nécessairement*

$$\forall (f,g) \in M^E \times M^E, \ (f *_{M^E} g)(x) \ = \ f(x) * g(x) \ ;$$

ce qui définit bien $*_{M^E}$ de manière unique.

II.4.5.21.iii

$$\begin{array}{lrcl} \forall (f,g,h) \in M^E \times M^E \times M^E, \ \forall x \in E, & \big((f *_{M^E} g) *_{M^E} h\big)(x) & = & \big(f *_{M^E} g\big)(x) * h(x) \\ & & = & (f(x) * g(x)) * h(x) \\ \text{associativité dans } M & & = & f(x) * (g(x) * h(x)) \\ & & = & f(x) * \big(g *_{M^E} h\big)(x) \\ & & = & \big(f *_{M^E} (g *_{M^E} h)\big)(x) \ ; \end{array}$$

c'est-à-dire que $(f *_{M^E} g) *_{M^E} h \ = \ f *_{M^E} (g *_{M^E} h)$ i.e. $*_{M^E}$ est associative.

II.4.5.21.iv

$$\begin{array}{lrcl} \forall (f,g) \in M^E \times M^E, \ \forall x \in E, & (f *_{M^E} g)(x) & = & f(x) * g(x) \\ \text{commutativité de } M & & = & g(x) * f(x) \\ & & = & (g *_{M^E} g)(x) \ . \end{array}$$

c'est-à-dire que $f *_{M^E} g \ = \ g *_{M^E} f$; i.e. $*_{M^E}$ est commutative.

II.4.5.21.v

$$\begin{array}{rcl} \forall f \in M^E, \ \forall x \in E, \quad (f *_{M^E} \epsilon_{M^E})(x) & = & f(x) * \epsilon \\ & = & f(x) \ ; \end{array}$$

i.e. $f *_{M^E} \epsilon_{M^E} \ = \ f$. On montrerait de même que $\epsilon_{M^E} *_{M^E} f \ = \ f$; si bien que ϵ_{M^E} est bien un élément neutre pour $*_{M^E}$.

Exercice II.7.1.4 **1)** Compléter la preuve de la proposition II.4.5.17.

2) **a)** Si ϵ est un *élément neutre* de M est-il encore un *élément neutre* d'un sous-magma N ?

Solution

Il se pourrait très bien que ϵ n'appartienne même pas N (cf. la question 1 de l'exercice II.7.1.2 .)

b) Si N possède un *élément neutre* η celui-ci est-il nécessairement celui de M ?

Solution

Non ! (cf. la question 1 de l'exercice II.7.1.2 .)

c) Si $x \in N$ possède un symétrique dans M celui-ci est-il aussi son symétrique dans N ?

Solution

On peut considérer $(\mathbb{N}, +)$ comme un sous-magma de $(\mathbb{Z}, +)$. Or dans $\mathbb{Z}$ tout élément a un opposé tandis que dans $\mathbb{N}$, seul 0 en a un.

d) Si $x \in N$ possède un symétrique dans N est-il aussi son symétrique dans M ?

Solution

Non ! (cf. la question 1 de l'exercice II.7.1.2 .)

Solution

Remarque 2.5 Le fait qu'on ait fréquemment recours à l'exercice II.7.1.2 pour trouver ici des contre exemple vient de ce qu'être un sous-magma signifie que $\mathrm{Id}\, M_{|N} \ : \ N \ \to \ M$ est un morphisme. Il est certes injectif ce qui pourrait aranger certaines choses ; mais de fait à l'exercice II.7.1.2 nous avions déjà construit des contre exemples avec un morphisme injectif . . .

Exercice II.7.1.5 Soit $(M, *)$ un magma associatif, d'*élément neutre* ϵ et N un sous-magma tel que $\epsilon \in N$. Montrer que :

1) ϵ est l'*élément neutre* de N.

Solution

On ajoute ici l'hypothèse que $\epsilon \in N$ dont on va voir qu'elle n'est pas anodine : En effet pour tout $x \in N$, $x *_N \epsilon = x *_M \epsilon$ puisque N est un sous-magma. Donc $x *_N \epsilon = x$. De même

$$\epsilon *_N x = \epsilon *_M x = x .$$

2) si $x \in N$ a un inverse y dans N, c'est aussi son inverse dans M.

Solution

Puisque N est un sous-magma

$$y *_M x = y *_N x = \epsilon = x *_N y = x *_M y .$$

Exercice II.7.1.6 Faire la preuve de la proposition II.4.5.24.

Solution

II.4.5.24.i Si p est un morphisme

$$\begin{aligned} \forall\big((x,y),(z,t)\big) \in \big(M \times N\big) \times \big(M \times N\big), \quad p\big((x,y) \dagger (z,t)\big) &= p(x,y) * p(z,t) \\ &= x * z ; \end{aligned}$$

le même raisonement pour q prouve que $\dagger$ est bien définie de manière unique.

— *II.4.5.24.ii On a déjà vu dans ce contexte (cf. l'exercice I.5.1.5 et le point iii de la proposition I.1.13.15,) qu'il existe une unique application*

$$h : P \to M \times N , \; x \mapsto \big(f(x), g(x)\big)$$

répondant à la question. Reste donc à voir que cette dernière est bien un morphisme or :

$$\begin{aligned} \forall(x,y) \in P, \quad h(x \sharp y) &= \big(f(x \sharp y), g(x \sharp y)\big) \\ &= \big(f(x) * f(y), g(x) \cdot g(y)\big) \\ &= \big(f(x), g(x)\big) \dagger \big(f(y), g(y)\big) \\ &= h(x) \dagger h(y) . \end{aligned}$$

Exercice II.7.1.7 (Unicité des éléments remarquables) Soit $(E, *)$ un ensemble muni d'une loi associative.

Solution

Il s'agit en définitive d'un magma (cf. cours définition II.4.5.1) associatif ; et l'on pourra se borner ici à rappler les résultats de la proposition II.4.5.14 et de l'exercice II.7.1.1 .

1) (**Élément neutre**)
Montrer que si $(E, *)$ possède un *élément neutre* ϵ celui-ci est <u>unique</u>.

Solution

(cf. le point i de la proposition II.4.5.14.)

2) (**Symétrique**)
Montrer que si $(E, *)$ possède un *élément neutre* ϵ, tout élément $x \in E$ possède <u>au plus un</u> symétrique.

Solution

(cf. le point ii de la proposition II.4.5.14.)

Exercice II.7.1.8 (Morphismes de groupes) Soit

$$f : (G, *, \epsilon_G) \to (H, \cdot, \epsilon_H)$$

un *morphisme de groupes* .

Solution

Cet exercice est évidemment à mettre en rapport avec exercice II.7.1.2 et l'on va constater que l'hypothèse que l'on a des groupes et non plus simplement des magmas donnent des propriétés supplémentaires :

1) (**Élément neutre**)
Montrer que $f(\epsilon_G) = \epsilon_H$.

Solution

On a $\epsilon_G * \epsilon_G = \epsilon_G$; *ce qui entraîne, puisque* f *est un morphisme*

$$f(\epsilon_G) \cdot f(\epsilon_G) = f(\epsilon_G * \epsilon_G) = f(\epsilon_G) .$$

Or H *est un groupe si bien que* $f(\epsilon_G)$ *a un symétrique* $\eta \in H$. *L'égalité précédente entraîne alors :*

$$\epsilon_H = \eta \cdot f(\epsilon_G)\, a = \eta \cdot f(\epsilon_G) \cdot f(\epsilon_G) \cdot f(\epsilon_G) = f(\epsilon_G) .$$

2) (**Symétrique**)
Montrer que pour tout $x \in G$, si y est son symétrique, $f(y)$ est le symétrique de $f(x)$.

Solution

Si $(x, y) \in G \times G$ *sont symétriques l'un de l'autre*

$$\begin{array}{rrcl} & x * y = y * x & = & \epsilon_G \\ \Rightarrow & f(x * y) = f(y * x) & = & f(\epsilon_G) \\ \Rightarrow & f(x) \cdot f(y) = f(y) \cdot f(x) & = & \epsilon_H \ ; \end{array}$$

en utilisant bien entendu question 1.

3) (**Image**)
Montrer que $\mathrm{Im}\, f$ est un sous-groupe de $(H, \cdot)$.

Solution

Puisque G *est un groupe il est non vide et par conséquent* $\mathrm{Im}\, f = f(G)$ *est non vide.*
De plus pour tout $(u, v) \in \mathrm{Im}\, f \times \mathrm{Im}\, f$, *il existe* $(x, y) \in G \times G$ *tel que*

$$u = f(x) \text{ et } v = f(y) .$$

Or (cf. 2,) $u^{-1} = f(x^{-1})$; *si bien que* $\cdot^{-1} v = f(x^{-1} * y)$ *qui appartient à* $\mathrm{Im}\, f$, *qui et donc ien un sous-groupe de* H.

4) (**Noyau**)
Montrer que $\mathrm{Ker}\, f$ est un sous-groupe de $(G, *)$.

Solution

Puisque (cf. 1,) $f(\epsilon_G) = \epsilon_H, \epsilon_G \in \mathrm{Ker}\, f$; *si bien que* $\mathrm{Ker}\, f \neq \emptyset$.
De plus :

$$\begin{array}{lrcl} \forall (x, y) \in \mathrm{Ker}\, f \times \mathrm{Ker}\, f, & f(x^{-1} * y) & = & f(x^{-1}) \cdot f(y) \\ & = & f(x)^{-1} \cdot f(y) & \\ & & = & \epsilon_H^{-1} \cdot \epsilon_H \\ & & = & \epsilon_H \\ \Rightarrow & x^{-1} * y & \in & \mathrm{Ker}\, f \ . \end{array}$$

ce qui prouve que $\mathrm{Ker}\, f$ *est un sous-groupe de* G.

5) (**Isomorphisme**)
Montrer que si f est bijective et que g est son applications réciproque, alors g est un morphisme de groupe.

Solution

Ici il n'est pas utile d'avoir affaire à des groupes puisque le résultat est déjà vrai pour des magmas associatifs (cf. II.4.5.6.)

Exercice II.7.1.9 (Le groupe $(\mathcal{S}(E), \circ)$) Soit E un ensemble.

1) Vérifier que $\circ$ est une loi interne sur $\mathcal{S}(E)$.

Solution

La composée de deux bijections de E dans E est encore une bijection de E dans E.

2) Montrer qu'il existe un *élément neutre* pour la loi $\circ$ dans $\mathcal{S}(E)$ et le caractériser.

Solution

Il est immédiat de constater que

$$\forall f \in \mathcal{S}(E),\ \mathrm{Id}_E \circ f = f \circ \mathrm{Id}_E = f$$

c'est-à-dire que l'application $\mathrm{Id}_E : E \to E$ caractérisée par

$$\forall x \in E,\ \mathrm{Id}E(x) = x$$

est un élément neutre pour $\circ$ dans $\mathcal{S}(E)$.

3) Montrer finalement que $(\mathcal{S}(E), \circ)$ est un groupe.

Solution

On a vu à la question 1 que la loi $\circ$ sur $\mathcal{S}(E)$ est une loi interne. Elle est évidemment associative. Elle possède un élément neutre Id_E (cf. la question 2 .)
De plus pour toute bijection $f : E \to E$ il existe une bijection $g : E \to E$ telle que

$$\forall x \in E,\ g[f(x)] = f[g(x)] = x$$

c'est-à-dire que $f \circ g = g \circ f = \mathrm{Id}_E$ (cf. l'exercice I.5.1.4,) donc que g est le symétrique de f pour $\circ$ qu'on notera usuellement f^{-1}.

Exercice II.7.1.10 (La bijection $\mathcal{S}(E) \cong \mathcal{S}(F)$) Soient E et F deux ensembles et $u : E \to F$ une bijection de E dans F dont on notera v la bijection réciproque *i.e.*

$$v : F \to E : v \circ u = \mathrm{Id}_E\ ,\ u \circ v = \mathrm{Id}_F\ .$$

Montrer que l'application

$$\phi_u : (\mathcal{S}(E), \circ) \to (\mathcal{S}(F), \circ)\ ,\ f \mapsto u \circ f \circ v$$

est un isomorphisme de groupes.

Solution

*i) (**Application**)*
On constate d'abord que, pour tout $f \in \mathcal{S}(E)$, $\phi_u(f) = u \circ f \circ v$ est bien une application de F dans lui-même qui est de plus, une bijection comme composée de trois bijections. C'est donc bien un élément de $\mathcal{S}(F)$.

*ii) (**Morphisme**)*
De plus,

$$\begin{aligned} \forall (f,g) \in \mathcal{S}(E) \times \mathcal{S}(E),\quad \phi_u(f \circ g) &= u \circ f \circ g \circ v \\ &= u \circ f \circ v \circ u \circ g \circ v \\ &= \phi_u(f) \circ \phi(g)\ ; \end{aligned}$$

c'est-à-dire que ϕ_u est bien un morphisme de groupes .

*iii) (**Isomorphisme**)*
Notons

$$\phi_v : (\mathcal{S}(F), \circ) \to (\mathcal{S}(E), \circ)\ ,\ f \mapsto v \circ f \circ u$$

Alors :

$$\begin{aligned} \forall f \in \mathcal{S}(E),\quad \phi_v[\phi_u(f)] &= v \circ \phi_u(f) \circ u \\ &= v \circ u \circ f \circ v \circ u \\ &= f \\ \Rightarrow \quad \phi_v \circ \phi_u &= \mathrm{Id}_{\mathcal{S}(E)}\ ; \end{aligned}$$

et de plus :

$$\begin{array}{rcl} \forall f \in \mathcal{S}(F), \quad \phi_u[\phi_v(f)] & = & u \circ \phi_v(f) \circ v \\ & = & u \circ v \circ f \circ u \circ v \\ & = & f \\ \Rightarrow \quad \phi_u \circ \phi_v & = & \mathrm{Id}_{\mathcal{S}(F)} \,. \end{array}$$

Ceci prouve que ϕ_u est un isomorphisme, d'isomorphisme réciproque ϕ_v.

Exercice II.7.1.11 (Sous-groupes) 1) (Intersection de deux sous-groupes)
Pour deux sous-groupes H et K d'un groupe G, $H \cap K$ est un sous-groupe de G.

Solution

Puisque H et K sont des sous-groupes $\epsilon \in H$ et $\epsilon \in K$; si bien que $\epsilon \in H \cap K$ qui est donc non vide.
De plus $\forall (x, y) \in (H \cap K) \times (H \cap K)$, ,

$$x^{-1} * y \in H \text{ et } x^{-1} * y \in K$$

puisque H et K sont des sous-groupes. Par conséquent $x^{-1} * y \in H \cap K$ qui est donc un sous-groupe.

2) (Union de deux sous-groupes)
Étant donnés des sous-groupes H et K d'un groupe commutatif $(G, +)$, montrer que $H \cup K$ est un sous-groupe de $(G, +)$ si et seulement si $H \subset K$ ou $K \subset H$.
Indication : *Montrer qu'il revient au même de démontrer que [$H \not\subset K$ et $H \cup K$ sous-groupe entraîne $K \subset H$] puis prouver cette dernière assertion.*

Solution

Étant donnés un groupe commutatif $(G, +)$, H et K des sous-groupes, si $H \subset K$ (resp. $K \subset H$,) $H \cup K = K$ (resp. H) qui est bien évidemment un sous-groupe.
Si $H \cup K$ est un sous-groupe de $(G, +)$ supposons que H n'est pas inclus dans K. Il existe alors $x \in H$ tel que $x \notin K$. Alors pour tout $y \in K$, x et y sont des éléments de $H \cup K$ et par conséquent $x + y \in H \cup K$ c'est-à-dire que $x + y \in K$ ou $x + y \in H$. Si $x + y \in K$, comme $y \in K$, $x + y - y \in K$ c'est-à-dire que $x \in K$ ce qui est contraire à l'hypothèse. Il s'ensuit que nécessairement $x + y \in H$. Comme $x \in H$, $x + y - x \in H$ c'est-à-dire que $y \in H$. Nous avons donc démontré que tout élément $y \in K$ est dans H c'est-à-dire que $K \subset H$.

3) (Famille filtrante)
Faire la preuve du point iv de la proposition II.5.6.22.

Solution

Notons $K := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} H$. $\forall n \in \mathbb{N}$, , H_n est un sous-groupe de G par hypothèse ; et H_n est donc non vide ; si bien que $K \neq \emptyset$.
Par ailleurs pour tout $(x, y) \in K \times K$, il existe $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tel que $x \in H_p$ et $y \in H_q$.
Or il existe, par hypothèse, $r \in \mathbb{N}$ tel que $H_p \subset H_r$ et $H_q \subset H_r$; si bien que

$$x \in H_r \text{ et } y \in H_r \,.$$

Or H_r étant un sous-groupe de G, $x^{-1} * y \in H_r$; comme $H_r \subset K$, $x^{-1} * y \in K$; ce qui achève de prouver que K est un sous-groupe de G.

Exercice II.7.1.12 (Groupe des automorphismes) Complétez la construction de l'exemple II.5.6.21.

Solution

Étant donné un groupe G,

- *on constate d'abord que $\mathrm{Aut}(G) \neq \emptyset$, puisqu'on a remarqué (cf. l'exemple II.5.6.14,) que $\mathrm{Id}_G \in \mathrm{Aut}(G)$.*
- *De plus pour tout $\phi \in \mathrm{Aut}(G)$, puisque $\phi \in \mathcal{S}(G)$, il exist $\psi \in \mathcal{S}(G)$ tel que*

$$\phi \circ \psi = \psi \circ \phi = \mathrm{Id}_G \,.$$

  Il résulte alors lemme II.4.5.5 que ψ et également un morphisme et donc un automorphisme i.e. $\psi \in \mathrm{Aut}(G)$.
- *Enfin $\forall (\phi, \psi) \in \mathrm{Aut}(G) \times \mathrm{Aut}(G)$, , $\phi \circ \psi \in \mathcal{S}(G)$, puisqu'on sait déjà que $\mathcal{S}(G)$ est un groupe. De plus $\phi \circ \psi$ est un morphisme d'après le point ii du lemme II.5.6.8.*

Il résulte alors des vérifications ci-dessus et de la proposition II.5.6.20 que $(\mathrm{Aut}(G), \circ)$ *est un sous-groupe de* $(\mathcal{S}(G), \circ)$.

Exercice II.7.1.13 On suppose que E est munie d'une relation d'équivalence $\sim$ et d'une loi

$$\cdot\ :\ E \times E\ \to\ E\ .$$

On suppose que $\cdot$ et $\sim$ sont *compatibles* c'est-à-dire que

$$\forall (x, y, z, t) \in E \times E \times E,\ \big(x \sim y\ \wedge\ z \sim t\ \Rightarrow x \cdot z\ \sim\ y \cdot t\big)\ .$$

On note $\pi\ :\ E\ \to\ E/\sim$ la *surjection canonique* .

1) Montrer qu'il existe une unique loi $\dagger\ :\ E/\sim \times E/\sim \to\ E/\sim$ tel que π soit un morphisme c'est-à-dire que

$$\forall (x, y) \in E \times E,\ \big(\pi(x \cdot y)\ =\ \pi(x) \dagger \pi(y)\big)\ .$$

On parle alors de *structure quotient*.

Solution

i) ***(Unicité)***

Pour tout $(\alpha, \beta)\ \in\ E/\sim \times E/\sim$*, il existe* $(x, y)\ \in\ E \times E$ *tel que*

$$\alpha\ =\ \pi(x) \text{ et } \beta\ =\ \pi(y)\ .$$

Alors nécessairement, dès l'instant où l'on exige que π *soit un morphisme*

$$\alpha \dagger \beta\ =\ \pi(x)\ \dagger\ \pi(y)\ =\ \pi(x \cdot y)\ ;$$

ce qui assure que $\dagger$ *est au plus définie d'une manière.*

ii) ***(Existence)***

Reste à voir si la formule ci-dessus définit bien $\dagger$ *; en d'autres termes s'il n'y a pas d'ambiguïté sur la définition. En effet, si* $(z, t)\ \in\ E \times E$ *vérifie*

$$\alpha\ =\ \pi(z) \text{ et } \beta\ =\ \pi(t),$$

on a, également nécessairement

$$\alpha\ \dagger\ \beta\ =\ \pi(z \cdot t)\ .$$

Il faut alors remarquer que :

$$\begin{array}{lrcl} & \pi(x) = \alpha = \pi(z) & \wedge & \pi(y) = \beta = \pi(t) \\ \Leftrightarrow x \sim z & & \wedge & y \sim t \\ \overset{\Rightarrow}{\sim \text{ et } \cdot \text{ sont compatibles}} & x \cdot y & \sim & z \cdot t \\ \Rightarrow & \pi(x \cdot y) & = & \pi(z \cdot t)\ ; \end{array}$$

ce qui assure que $\dagger$ *est bien définie.*

2) Montrer que si $\cdot$ est associative, (resp. possède un *élément neutre*) (resp. est commutative) il en est de même de $\dagger$. Montrer que si $x\ \in\ E$ possède un symétrique y pour $\cdot$ alors $\pi(y)$ est le symétrique de $\pi(x)$ pour $\dagger$.

Solution

i) ***(Associativité)***

Supposons que $\cdot$ *est associative. Alors :*

$$\begin{array}{rcl} \forall (\alpha, \beta, \gamma) \in E/\sim \times E/\sim \times E/\sim,\quad \exists (x, y, z)\ \in\ E \times E \times E, & & \alpha = \pi(x), \beta = \pi(y), \gamma = \pi(z) \\ \alpha \dagger (\beta \dagger \gamma) & = & \pi(x) \dagger [\pi(y) \dagger \pi(z)] \\ & = & \pi(x) \dagger \pi(y \cdot z) \\ & = & \pi[x \cdot (y \cdot z)] \\ & = & \pi[(x \cdot y) \cdot z] \\ & = & \pi(x \cdot y) \dagger \pi(z) \\ & = & [\pi(x) \dagger \pi(y)] \dagger \pi(z) \\ & = & (\alpha \dagger \beta) \dagger \gamma\ ; \end{array}$$

ce qui prouve que $\dagger$ est associative.

*ii) (**Commutativité**)*
C'est un calcul à peu près identique à celui fait ci-dessus.

*iii) (**Élément neutre**)*
On pourrait légitimement penser que si $e \in E$ est un élément neutre pour $\cdot$, $\pi('e)$ est un élément neutre pour $\dagger$. On a cependant vu (cf. la question 1 de l'exercice II.7.1.2 ,) qu'en toute généralité l'image du neutre n'est pas nécessairement le neutre ; même si c'est le cas dans le contexte des groupes (cf. la question 1 de l'exercice II.7.1.8 .)
Cependant ici, pour tout $\alpha \in E/\sim$, il existe $x \in E$ tel que $\alpha = \pi(x)$. Alors :

$$\begin{aligned}\alpha \dagger \pi(e) &= \pi(x) \dagger \pi(e)\\ &= \pi(x \cdot e)\\ &= \pi(x)\\ &= \alpha\\ &= \pi(e \cdot x)\\ &= \pi(e) \dagger \pi(x)\\ &= \pi(e) \dagger \alpha\ ;\end{aligned}$$

ce qui prouve que $\pi(e)$ est bien un élément neutre . On pourrait laisser le lecteur réfléchir encore un peu à ce qu'on a ajouté ici[a] par rapport à la question 1 de l'exercice II.7.1.2 .

*iv) (**Symétrique**)*
découle du point ci-dessus.

a. la surjectivité de π !!!

3) Donner des exemples déjà connus des constructions précédentes.

II.7.2 . −Morphismes

Exercice II.7.2.1 (Morphismes) 1) (Identité)
Faire la démonstration du point i du lemme II.1.3.

2) (Composé)
Faire la démonstration du point ii du lemme II.1.3.

Exercice II.7.2.2 (Inverse) Faire la démonstration du lemme II.3.3.

Solution

*i) (**II.3.3.i**)*
C'est exactement le point ii de la proposition II.4.5.14.

*ii) (**II.3.3.ii**)*
C'est une conséquence immédiate du point i qui assure l'unicité et qui assure l'existence.

Exercice II.7.2.3 (Isomorphismes) Compléter la démonstration de la proposition II.3.5.

Solution

On doit donc montrer que entraîne .

Si $\begin{array}{ccc}\mathcal{E}(G) & \xrightarrow{\mathcal{E}(\phi)} & \mathcal{E}(H)\\ {\scriptstyle\varepsilon(G)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varepsilon(H)}\\ \mathcal{V}(G)\times\mathcal{V}(G) & \xrightarrow{\mathcal{V}(\phi)\times\mathcal{V}(\phi)} & \mathcal{V}(H)\times\mathcal{V}(H)\end{array}$ *est un isomorphisme de graphes au sens , il existe un morphisme de graphes*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}(H) & \xrightarrow{\mathcal{E}(\psi)} & \mathcal{E}(G) \\ {\scriptstyle\varepsilon(H)}\downarrow & & {\scriptstyle\varepsilon(G)}\downarrow \\ \mathcal{V}(H)\times\mathcal{V}(H) & \xrightarrow{\mathcal{V}(\psi)\times\mathcal{V}(\psi)} & \mathcal{V}(G)\times\mathcal{V}(G) \end{array}$$

tel que $\psi \circ \phi = \mathrm{Id}_G$ et $\phi \circ \psi = \mathrm{Id}_H$ *. Ceci entraîne, en particulier que :*

$$\begin{array}{rcccl} \mathrm{Id}_{\mathcal{V}(G)} & = & \mathcal{V}(\psi\circ\phi) & = & \mathcal{V}(\psi)\circ\mathcal{V}(\phi)\ , \\ \mathrm{Id}_{\mathcal{V}(H)} & = & \mathcal{V}(\phi\circ\psi) & = & \mathcal{V}(\phi)\circ\mathcal{V}(\psi)\ , \\ \mathrm{Id}_{\mathcal{E}(G)} & = & \mathcal{E}(\psi\circ\phi) & = & \mathcal{E}(\psi)\circ\mathcal{E}(\phi)\ , \\ \mathrm{Id}_{\mathcal{E}(H)} & = & \mathcal{E}(\phi\circ\psi) & = & \mathcal{E}(\phi)\circ\mathcal{E}(\psi)\ . \end{array}$$

Ceci entraîne que $\mathcal{V}(\phi)$ *et* $\mathcal{E}(\phi)$ *sont bijective s.*

Exercice II.7.2.4 (Groupe des automorphismes) Soit G **un** ***graphe*** **(resp. un** ***graphe à involution*** **,) (resp. un** ***graphe non-orienté*** **.)**

1) Montrer que $\mathrm{Aut}_{\mathbf{gph}}(G)$ (resp. $\mathrm{Aut}_{\mathbf{gph}^{\mathrm{inv}}}(G)$,) (resp. $\mathrm{Aut}_{\mathbf{gph}^{\text{n-o}}}(G)$,) est un *groupe* pour la *loi de composition* $\circ$.

Solution

Loi interne *On sait (cf. le point ii du lemme II.1.3 (resp. ,) (resp. ,)) que le composé de deux morphismes est un morphisme (pour la structure correspondante.) Ainsi la loi de composition* $\circ$ *est-elle interne sur* $\mathrm{End}_{\mathbf{gph}}(G)$, *(resp.* $\mathrm{End}_{\mathbf{gph}^{inv}}(G)$*,) (resp.* $\mathrm{End}_{\mathbf{gph}^{n\text{-}o}}(G)$*.)*

Associative *La loi* $\circ$ *de composition des applications est associative.*

Élément neutre *L'identité* Id_G *est un élément neutre (cf. le point iii du lemme II.1.3 (resp. ,) (resp. .))*

Inverse *Enfin un automorphisme est en particulier un isomorphisme et possède donc un inverse (cf. (resp. ,) (resp. ,)) lequel est encore un automorphisme .*

2) Montrer que l'*application* $\begin{array}{rcl} \mathrm{Aut}_{\mathbf{gph}}(G)\big(\text{resp. } \mathrm{Aut}_{\mathbf{gph}^{\mathrm{inv}}}(G),\big)\big(\mathrm{Aut}_{\mathbf{gph}^{\text{n-o}}}(G),\big) & = & \mathcal{S}(\mathcal{V}(G)) \\ \phi & \mapsto & \mathcal{V}(\phi) \end{array}$

est un *morphisme de groupes* .

Solution

On rappelle que l'ensemble $\mathcal{S}(\mathcal{V}(G))$ *des bijections de* $\mathcal{V}(G)$ *sur lui-même est un groupe pour la loi de composition* $\circ$ *d'élément neutre* $\mathrm{Id}_{\mathcal{V}(G)}$.

Pour tout $\begin{array}{rl} (\phi,\psi) \in & \mathrm{Aut}_{\mathbf{gph}}(G)\times\mathrm{Aut}_{\mathbf{gph}}(G) \\ & \big(\textit{resp. } \mathrm{Aut}_{\mathbf{gph}^{inv}}(G)\times\mathrm{Aut}_{\mathbf{gph}^{inv}}(G),\big) \\ & \big(\textit{resp. } \mathrm{Aut}_{\mathbf{gph}^{n\text{-}o}}(G)\times\mathrm{Aut}_{\mathbf{gph}^{n\text{-}o}}(G),\big) \end{array}$ $\mathcal{V}(\psi \circ \phi) = \mathcal{V}(\psi) \circ \mathcal{V}(\phi)$ *; ce qui assure le résultat.*

3) Étant donné un *graphe* (resp. un *graphe à involution* ,) (resp. un *graphe non-orienté* ,) H et $\phi : G \cong H$ un *isomorphisme de graphes* (resp. un *isomorphisme de graphes à involution* ,) (resp. un *isomorphisme de graphes non-orientés* ,) construire un *isomorphisme de groupes*

$$\begin{array}{rl} & \mathrm{Aut}_{\mathbf{gph}}(G) \cong \mathrm{Aut}_{\mathbf{gph}}(H)\ , \\ \big(\text{resp.} & \mathrm{Aut}_{\mathbf{gph}^{\mathrm{inv}}}(G) \cong \mathrm{Aut}_{\mathbf{gph}^{\mathrm{inv}}}(H)\ ,\ \big) \\ \big(\text{resp.} & \mathrm{Aut}_{\mathbf{gph}^{\text{n-o}}}(G) \cong \mathrm{Aut}_{\mathbf{gph}^{\text{n-o}}}(H)\ .\ \big) \end{array}$$

Solution

Pour tout $\alpha \in \mathrm{Aut}(G)$ *le composé* $\phi \circ \alpha \circ \phi^{-1}$ *est (cf. le point ii du lemme II.1.3, (resp. ,)= (resp. ,)) est un morphisme , donc un endomorphisme de* H *; c'est aussi un isomorphisme donc un automorphisme . On définit ainsi une application*

$$\begin{array}{rccc} a_\phi : & \mathrm{Aut}(G) & \longrightarrow & \mathrm{Aut}(H) \\ & \alpha & \longmapsto & \phi\circ\alpha\circ\phi^{-1}\ . \end{array}$$

Or :

$$\begin{array}{rcl} \forall(\alpha,\beta)\in\mathrm{Aut}(G)\times\mathrm{Aut}(G),\quad a_\phi(\alpha\circ\beta) & = & \phi\circ\alpha\circ\beta\circ\phi^{-1} \\ & = & \phi\circ\alpha\circ\phi^{-1}\circ\phi\circ\beta\circ\phi^{-1} \\ & = & a_\phi(\alpha)\circ a_\phi(\beta)\ ; \end{array}$$

ce qui assure que a_ϕ *est un morphisme de groupes .*

On définit, de la même manière $a_{\phi^{-1}} : \mathrm{Aut}(H) \to \mathrm{Aut}(G)$, $\beta \mapsto \phi^{-1} \circ \beta \circ \phi$; qui est, de même un *morphisme de groupes* . On vérifie immédiatement que

$$a_{\phi^{-1}} \circ a_{\phi} = \mathrm{Id}_{\mathrm{Aut}(G)} \text{ et } a_{\phi} \circ a_{\phi^{-1}} = \mathrm{Id}_{\mathrm{Aut}(H)} ;$$

ce qui prouve que a_ϕ et $a_{\phi^{-1}}$ sont des *isomorphismes inverses* l'un de l'autre.

II.7.3 . −Sous-graphes

Exercice II.7.3.1 (Sous-graphes) Faire la démonstration de la proposition II.2.1.

Solution

Reste donc à montrer que le point b de la proposition II.2.1 entraîne le point a.
Si la restriction de l'identité à
$\big(\mathcal{V}(H), \mathcal{E}(H)\big)$ *est un morphisme de graphes , elle vérifie en particulier l'axiome MorGph*$_3$ *de la définition II.1.1 ou sa formulation équivalente . Ainsi pour tout* $e \in \mathcal{E}(H)$, *si* $\varepsilon(H)(e) = (u,v) \in \mathcal{V}(H) \times \mathcal{V}(H), \varepsilon(G)\big(\mathrm{Id}_{\mathcal{E}(G)_{|\mathcal{E}(H)}}(e)\big) = \big(\mathrm{Id}_{\mathcal{V}(G)_{|\mathcal{V}(H)}} \times \mathrm{Id}_{\mathcal{V}(G)_{|\mathcal{V}(H)}}\big)(u,v) = (u,v)$; *c'est-à-dire* $\varepsilon(H)(e) = \varepsilon(G)(e)$; *ce qui correspond bien au point a de la proposition II.2.1.*

Exercice II.7.3.2 (Sous-graphe) Faire la démonstration de la proposition II.2.3.

Solution

II.2.3.a ⇒ II.2.3.b Il suffit d'utiliser la caractérisation II.2.1.a.

II.2.3.b ⇒ II.2.3.a Dans ce cas, $\big(W, F, \varepsilon(G)_{|F}\big)$ *est bien un graphe ; et toujours d'après le point a de la proposition II.2.1 c'est bien un sous-graphe de* G.

L'unicité de H *résulte de ce que si un tel sous-graphe existe, nécessairement, toujours d'après le point a de la proposition II.2.1,* $\varepsilon(H) = \varepsilon(G)_{|F}$; *et le sous-graphe* H *est donc* $\big(W, F, \varepsilon(G)_{|F}\big)$.

II.7.4 . −

Graphes finis simples non-orientés

Exercice II.7.4.1 (Chemins et cycles dans un graphe) Soit $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$ un *graphe fini* (non vide.) On note $\delta(G) := \min_{u \in \mathcal{V}(G)}\big(d_G(u)\big)$.

1) Montrer que G contient un *chemin* de *longueur* $\delta(G)$ *i.e.* un *sous-graphe isomorphe* à $\mathbf{P}_{\delta(G)}$.

Solution

On va en fait montrer un résultat plus fort ; à savoir que pour tout sommet $u \in \mathcal{V}(G)$, *il existe un chemin dont* u *est un sommet ; en d'autres termes un chemin contenant* u *ou « passant par* u. »

Soit $u \in \mathcal{V}(G)$ *et* $\mathbf{P}$ *l'ensemble des chemins* P *tels que* $u \in \mathcal{V}(P)$. *L'ensemble* $\mathbf{P}$ *est non vide puisque il contient au moins le chemin de longueur* 0 *constitué du seul sommet* u *(isomorphe au graphe isolé* $\mathbf{I}_1$.*) La longueur des éléments de* $\mathbf{P}$ *est majorée par* $\#\big(\mathcal{V}(G)\big)$. *Il existe donc* $P_{\max} \in \mathbf{P}$ *de longueur maximale .*

Notons $\mathcal{V}(P_{\max}) := \{u_0, \ldots, u_n\}$ *et* $\mathcal{E}(P_{\max}) := \big\{\{u_i, u_{i+1}\}\big\}_{0 \le i \le n-1}$.

Si u_n *a un voisin* $v \notin \mathcal{V}(P_{\max})$, *en posant* $u_{n+1} := v$ *et* $\mathcal{V}(Q) := \{u_0, \ldots, x_{n+1}\}$, $Q \in \mathbf{P}$ *est un chemin de longueur* $n+1$; *ce qui contredit le fait que* $P_{\max}$ *est de longueur maximale dans* $\mathbf{P}$.

Les voisins de u_n *appartiennent donc tous à* $\mathcal{V}(P_{\max})$; *ce qui entraîne que* $\#\big(\mathcal{V}(P_{\max})\big) \ge \delta(G) + 1$; *ce qui entraîne finalement que la longueur de* $P_{\max}$ *est supérieure ou égale à* $\delta(G)$.

2) Si $\delta(G) \ge 2$, montrer que G contient un *cycle* de *longueur* $> \delta(G)$ *i.e.* un *sous-graphe isomorphe* à $\mathbf{C}_\ell$, $\ell > \delta(G)$.

Solution

Soit $P_{\max}$ *un chemin de longueur maximale construit comme à la question 1 ; et notons* $\mathcal{V}(P_{\max}) := \{u_0, \ldots, u_n\}$. *Tous les voisins de* u_0 *appartiennent à* $\mathcal{V}(P_{\max})$; *sans quoi, comme nous l'avons observé à la question 1 ,* $P_{\max}$ *ne serait pas de longueur maximale . Puisque* $\delta(G) \ge 2$, $I := \{i \in [1;n] \,;\, u_i \in N_G(u_0)\} \neq \emptyset$. *Posons donc* $j := \max(I)$. *Comme* $j \ge \delta(G)$, *le* C *le cycle tel que* $\mathcal{V}(C) := \{u_0, \ldots, j_j\}$ *a au moins* $\delta(G) + 1$ *sommets et est donc de longueur strictement supérieure à* $\delta(G)$.

Exercice II.7.4.2 (Exemples de groupes d'automorphismes) Soit $n \in \mathbb{N}$.

1) Déterminer le *groupe* $\mathrm{Aut}_{\mathbf{gph}^{\text{n-o}}}(\mathbf{I}_n)$ du *graphe isolé* à n *sommet* s.

Solution

On a montré , que l'application $\sigma : \mathrm{Aut}(\mathbf{I}_n) \to \mathcal{S}([1;n])$, $\phi \mapsto \mathcal{V}(\phi)$ *est un morphisme de groupes . Or* $\mathcal{E}(\mathbf{I}_n) = \emptyset$*, si bien qu'un automorphisme* $\phi \in \mathrm{Aut}(\mathbf{I}_n)$ *est nécessairement de la forme* $\big(\mathcal{V}(\phi), \emptyset \to \emptyset\big)$ *; ce qui prouve que* σ *est une application bijective et donc un isomorphisme .*

Le groupe des bijections de l'ensemble $[1;n]$ *est usuellement appelé groupe symétrique et noté* $\mathcal{S}_n$ *; si bien que* σ *donne un isomorphisme de groupes*

$$\mathrm{Aut}(\mathbf{I}_n) \cong \mathcal{S}_n \ .$$

2) Déterminer le *groupe* $\mathrm{Aut}_{\mathbf{gph}^{\text{n-o}}}(\mathbf{K}_n)$ du *graphe complet à* n *sommets* .

Solution

On dispose du même morphisme de groupes qu'à la question 1 , (toujours donné par ,) $\sigma : \mathrm{Aut}(\mathbf{K}_n) \to \mathcal{S}_n$, $\phi \mapsto \mathcal{V}(\phi)$.

Pour tout $s \in \mathcal{S}_n$ *il existe*
$\phi \in \mathrm{Aut}(\mathbf{K}_n)$ *tel que* $\sigma(\phi) = s$*, si et seulement si il existe une bijection* $t : \mathcal{E}(\mathbf{K}_n) \to \mathcal{E}(\mathbf{K}_n)$ *tel que* (s,t) *soit un morphisme de graphes .*

Unicité de t *Pour* $s \in \mathcal{S}_n$ *s'il existe* $t \in \mathcal{S}(\mathcal{E}(\mathbf{K}_n))$ *tel que* $(s,t) \in \mathrm{Aut}(\mathbf{K}_n)$*, nécessairement pour tout* $e \in \mathcal{E}(\mathbf{K}_n)$ *tel que* $\varepsilon(\mathbf{K}_n)(e) = \{u,v\} \in \mathcal{P}_2(\mathbf{K}_n)$, $\varepsilon(\mathbf{K}_n)\big(t(e)\big) = \{s(u), s(v)\}$ *. Or, puisque* $s \in \mathcal{S}_n$, $s(u) \neq s(v)$ *; et par conséquent* $\varepsilon(\mathbf{K}_n)^{-1}(\{\{u,v\}\})$ *est un singleton ; si bien que* $t(e)$ *est uniquement déterminé.*

Existence de t *Reste à vérifier que la construction ci-dessus définit bien un morphisme de graphes non-orientés ; ce qui est, pour ainsi dire, immédiat.*

On vient donc de montrer, comme à la question 1 , que σ *est une application bijective et donc un isomorphisme de groupes . On a donc*

$$\mathrm{Aut}(\mathbf{K}_n) \cong \mathcal{S}_n \ .$$

Exercice II.7.4.3 (Automorphismes) 1) Déterminer le *groupe des automorphismes* du *graphe fini simple non-orienté* $\mathbf{P}_n$ pour $n \geq 2$.

Solution

- *Si on note* $\mathbf{P}_2 = (\{a,b\}, \{\{a,b\}\})$ *, les seules bijections de* $\{a,b\}$ *sont l'identité et la transposition* (ab) *qui sont des automorphismes de* $\mathbf{P}_2$*. Le groupe des automorphismes de* $\mathbf{P}_2$ *est donc* $S_2 \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
- *Si on note* $\mathbf{P}_3 = (\{a,b,c\}, \{\{a,b\},\{b,c\}\})$ *, un automorphisme envoyant un sommet sur un sommet de même degré, si* σ *est un tel automorphisme,* $\sigma(a) = a$ *ou* $\sigma(a) = c$ *et nécessairement* $\sigma(b) = b$*. Il en résulte que les deux seuls automorphismes de* $\mathbf{P}_3$ *sont l'identité et la transposition* (ac)*. Le groupe des automorphisme est ici encore* $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
- *Notons* $\mathbf{P}_n := (x_1, \ldots, x_n)$*. Les mêmes considérations sur les degrés entraînent que pour tout automorphisme* σ *de* $\mathbf{P}_n$ $\sigma(x_1) = x_1$ *ou* $\sigma(x_1) = x_n$*. Alors* $\{\sigma(x_1), \sigma(x_2)\}$ *est une arête de* $\mathbf{P}_n$*, ce qui entraîne (puisque le seul voisin de* x_1*, (resp.* x_n*) est* x_2 *(resp.* x_{n-1}*,)) que* $\sigma(x_2) = x_2$ *(resp.* $\sigma(x_2) = x_{n-1}$*.)*
  Par récurrence, il en résulte que pour tout $1 \leq i \leq n$, $\sigma(x_i) = x_i$ *(resp.* $\sigma(x_i) = x_{n+1-i}$*.)*
  Les deux seuls automorphismes de $\mathbf{P}_n$ *sont donc l'identité et la syméttrie* $x_i \mapsto x_{n+1-i}$ *; si bien que le groupe des automorphismes de* $\mathbf{P}_n$ *est encore isomorphe à* $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

2) (**Automorphismes de** $\mathbf{C}_4$)
On note $\Gamma := \mathrm{Aut}_{\mathbf{gph}^{\text{n-o}}}(\mathbf{C}_4)$ **le *groupe des automorphismes* du *cycle*** $\mathbf{C}_4$.

a) Montrer que l'*application* $\mathcal{V}$ qui à tout $\alpha = \big(\mathcal{V}(\alpha), \mathcal{E}(\alpha)\big) \in \Gamma$ associe $\mathcal{V}(\alpha)$ est un *morphisme de groupes* (cf. la définition II.5.6.6,) de Γ dans le *groupe symétrique* $\mathcal{S}_4$.

Solution

L'ensemble des sommets $\mathcal{V}(\mathbf{C}_4)$ *de* $\mathbf{C}_4$ *est (cf. I.4.12,) est* $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ *; si bien que pour tout* $\alpha \in \Gamma$, $\mathcal{V}(\alpha)$ *est bien une bijection de* $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ *;* $\mathcal{S}(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ *étant lui-même isomorphe à* $\mathcal{S}_4$.

Comme $\forall(\alpha,\beta) \in \Gamma \times \Gamma$, $\mathcal{V}(\alpha \circ \beta) = \mathcal{V}(\alpha) \circ \mathcal{V}(\beta)$*, l'application est bien un morphisme de groupes .*

b) Le *morphisme* $\mathcal{V}$ est-il *surjectif* ?

Solution

Soit

$$\begin{array}{rccc} \tau: & \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \\ & 0 & \longmapsto & 0 \\ & 1 & \mapsto & 2 \\ & 2 & \mapsto & 1 \\ & 3 & \mapsto & 3\,. \end{array}$$

S'il existe $\alpha \in \Gamma$ *tel que* $\mathcal{V}(\alpha) = \tau$, *il existe* $\mathcal{E}(\alpha) : \mathcal{E}(\mathbf{C}_4) \to \mathcal{E}(\mathbf{C}_4)$ *tel que*

$$\forall e \in \mathcal{E}(\mathbf{C}_4),\ \mathcal{P}_{1,2}(\tau)\big(\varepsilon(\mathbf{C}_4)(e)\big) = \varepsilon(\mathbf{C}_4)\big(\mathcal{E}(\alpha)(e)\big)\,.$$

En particulier $\mathcal{E}(\alpha)\big(\{0,1\}\big) \in \varepsilon(\mathbf{C}_4)^{-1}(\{\{\tau(0),\tau(1)\}\}) = \varepsilon(\mathbf{C}_4)^{-1}(\{\{0,2\}\}) = \emptyset$ *; ce qui contredit l'existence de* $\mathcal{E}(\alpha)$ *si bien que* $\mathcal{V}$ *n'est pas surjective .*

c) Est-il *injectif* ?

Solution

Puisque $\mathcal{V}$ *est un morphisme de groupes , il suffit de considérer son noyau (cf. le point i de la définition II.5.6.24.)*

Soit $\alpha \in \operatorname{Ker}\mathcal{V}$. *Pour tout* $e \in \mathcal{E}(\mathbf{C}_4)$, *il existe* $(v,w) \in \mathcal{V}(\mathbf{C}_4)\times\mathcal{V}(\mathbf{C}_4)$ *tel que* $\varepsilon(e) = \{v,w\}$ *. Il s'ensuit que* $\varepsilon\big(\alpha(e)\big) = \big\{\alpha(v),\alpha(w)\big\}$ *. Or* $\mathcal{V}(\alpha) = \mathrm{Id}_{\mathcal{V}(\mathbf{C}_4)}$, *par hypothèse ; si bien que*

$$\varepsilon\big(\alpha(e)\big) = \{v,w\} = \varepsilon(e)\,.$$

Il s'ensuit donc que $\varepsilon\big(\alpha(e)\big) \in \varepsilon^{-1}\big(\{\{v,w\}\}\big)$ *. Or, puisque* $\mathbf{C}_4$ *est un graphe simple (cf. la définition I.4.1,)* $\#\big(\varepsilon^{-1}\big(\{\{v,w\}\}\big)\big) \leq 1$. *Comme* $e \in \varepsilon^{-1}\big(\{\{v,w\}\}\big)$,

$$\varepsilon^{-1}\big(\{\{v,w\}\}\big) = \{e\}\,.$$

Il en résulte que $\alpha(e) = e$; *c'est-à-dire que* $\mathcal{E}(\alpha) = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}(\mathbf{C}_4)}$ *; si bien que* $\alpha = \mathrm{Id}_G$ *; d'où l'on déduit finalement que*

$$\operatorname{Ker}\mathcal{V} = \{\mathrm{Id}_G\}\,.$$

Il résulte alors de la proposition II.5.6.26 que $\mathcal{V}$ *est injectif .*

À noter que la seule propriété de $\mathbf{C}_4$ *qu'on a utilisée est q'uil est simple ; et le résultat vaudrait donc pour n'importe quel graphe simple non-orienté (cf. la proposition II.6.4.1.)*

d) Déterminer Γ.

Solution

Soit $\rho := \left(\begin{array}{rccc} \mathcal{V}(\rho): & \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \\ & i & \longmapsto & i+1 \\ \mathcal{E}(\rho): & \mathcal{E}(\mathbf{C}_4) & \longrightarrow & \mathcal{E}(\mathbf{C}_4) \\ & \{i,i+1\} & \longmapsto & \{i+1,i+2\} \end{array}\right)$ *est un élément de* Γ.

Pour tout $\tau \in \Gamma$, *il existe* $k \in \mathbb{Z}$ *(et même* $k \in \mathbb{N}$ *et même* $k \in [0;3]$ *tel que*

$$\mathcal{V}(\tau)(0) = \mathcal{V}(\rho)^k(0) = \mathcal{V}\big(\rho^k\big)()0\,. \qquad 1$$

Reste donc à déterminer les élément $\xi \in \Gamma$ *tels que* $\mathcal{V}(\xi)(0) = 0$. *Un tel* ξ *vérifie nécessairement* $0 \in \mathcal{E}(\xi)\big(\{0,1\}\big)$ *; ce qui entraîne*

$$\mathcal{E}(\xi)\big(\{0,1\}\big) = \{0,1\} \text{ ou } \{0,3\}\,.$$

Ceci entraîne $\mathcal{V}(\xi)(1) = 1$ ou $\mathcal{V}(\xi)(1) = 3$.

- *Soit* $\mathcal{V}(\xi)(1) = 1$ *. Le même raisonnement que ci-dessus à propos des arêtes d'extrémités* 1, *entraîne que* $\mathcal{V}(\xi)(2) = 2$ ou $\mathcal{V}(\xi)(2) = 0$ *. Or* $\mathcal{V}(\xi)$ *étant injective , nécessairement* $\mathcal{V}(\xi)(2) = 2$ *; et pour la même raison d'injectivité ,* $\mathcal{V}(\xi)(3) = 3$ *; c'est-à-dire que* $\mathcal{V}(\xi) = \mathrm{Id}_{\mathcal{V}(\mathbf{C}_4)}$ *; ce qui entraîne, en utilisant le point c , par exemple,* $\xi = \mathrm{Id}_{\mathbf{C}_4}$.
- *Soit* $\mathcal{V}(\xi)(1) = 3$. *sommet s Comme on a toujours* $\mathcal{V}(\xi)(3) \in \{0,3\}\cup\{0,1\}$, *par injectivité de* $\mathcal{V}(\xi)$, $\mathcal{V}(\xi)(3) = 1$ *. Toujours en vertu de l'injectivité de* $\mathcal{V}(\xi)$, $\mathcal{V}(\xi)(2) = 2$.

arête s Soit σ défini par :

$$\begin{array}{rrcl} \mathcal{V}(\sigma): & \mathcal{V}(\mathbf{C}_4) = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathcal{V}(\mathbf{C}_4) = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \\ & 0 & \longmapsto & 0 \\ & 1 & \mapsto & 3 \\ & 2 & \mapsto & 2 \\ & 3 & \mapsto & 1\,, \end{array} \tag{2}$$

$$\begin{array}{rrcl} \mathcal{E}(\sigma): & \mathcal{E}(\mathbf{C}_4) & \longrightarrow & \mathcal{E}(\mathbf{C}_4) \\ & \{0,1\} & \longmapsto & \{0,3\} \\ & \{1,2\} & \mapsto & \{2?3\} \\ & \{2,3\} & \mapsto & \{1,2\} \\ & \{3,0\} & \mapsto & \{0,1\}\,. \end{array}$$

On vérifie que $\sigma \in \Gamma$; *ce qui est à peu près immédiat et que c'est le seul vérifiant 2 et, par conséquent*

<u>*le seul vérifiant*</u> $\mathcal{V}(\sigma)(0) = 0$ et $\mathcal{V}(\sigma)(1) = 3$.

Remarquons finalement que $\sigma \circ \sigma = \mathrm{Id}_{\mathbf{C}_4}$.

Pour tout $\tau \in \Gamma$, *il existe* $k \in [0;3]$ *tel que* $\mathcal{V}(\tau)(0) = \mathcal{V}\big(\rho^k\big)(0)$; *si bien que* $\mathcal{V}\big(\rho^{-k} \circ \tau\big)(0) = 0$. *Il en résulte que* $\rho^{-k} \circ \tau = \mathrm{Id}_{\mathbf{C}_4}$ ou $\rho^{-k} \circ \tau = \sigma$; *si bien que*

$$\tau = \rho^k \circ \mathrm{Id}_{\mathbf{C}_4} \text{ ou } \tau = \rho^k \circ \sigma\ ;$$

et finalement

$$\gamma = \{\rho^k \circ \sigma^\ell\}_{\substack{k \in [0;3] \\ \ell \in [0;1]}}\ .$$