Définition :

On appelle **système linéaire** de deux équations à deux inconnues le système : $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$

- avec a, b, c, a', b' et c' des réels ;
- avec x et y deux inconnues.

Résoudre le système :

C'est déterminer le ou les couples de solution $(x\ ;\ y)$ (s'ils existent) afin que les deux égalités soient vraies simultanément.

Nombre de solutions ; 3 possibilités :

- Soit aucune solution.
- Soit un seul couple $(x\ ;\ y)$ de solution.
- Soit une infinité de solutions.

1. Résoudre graphiquement

Résoudre graphiquement le système :

C'est trouver l'intersection des droites (D) d'équation $ax+by=c$ et (D') d'équation $a'x+b'y=c'$.

3 cas sont possibles :

- (D) et (D') sont sécantes en A : une seule solution possible : $\boxed{S=\{(x_A\,;y_A)\}}$
- (D) et (D') sont strictement parallèles : Pas de solutions (pas d'intersection) $\boxed{S=\emptyset}$
- (D) et (D') sont confondues : Tous les points de (D) ou (D') sont solutions $\boxed{S=\{(x\,;y);ax+by+c=0\}}$

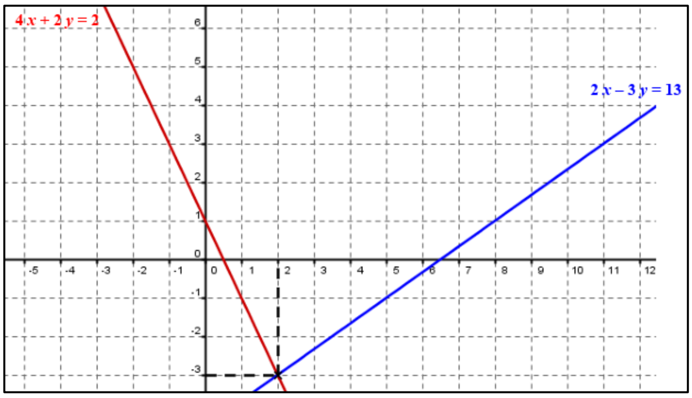
Exemple :

Résoudre graphiquement le système : $\begin{cases} 4x+2y=2 \\ 2x-3y=13 \end{cases}$

On trace les deux droites d'équations $4x+2y=2$ et $2x-3y=13$.

Elle sont sécantes en A(2 ; -3).

Donc $\boxed{S=\{(2\,;\,-3)\}}$



*

Exercice 1 : Résoudre graphiquement sur 3 repères différents les trois systèmes suivants et donner l'ensemble des solutions.

a. $\begin{cases} 2x-5y=2 \\ 3x+4y=3 \end{cases}$; b. $\begin{cases} x-y+1=0 \\ -3x+3y-3=0 \end{cases}$; c. $\begin{cases} y=2x \\ -4y+8x+8=0 \end{cases}$

2. Trouver le nombre de solutions

Définition :

On appelle **déterminant** du système d'équation $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ le nombre : det = $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$ = $a \times b' - a' \times b$

Proposition :

- Le système linéaire $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ admet une solution unique si et seulement si det = $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0$.
- Si det = $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0$ le système admet soit une infinité de solutions, soit aucune solution.

Exemples :

- Quel est le nombre de solutions du système : $\begin{cases} 4x+2y=2 \\ 2x-3y=13 \end{cases}$

  Det = $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}$ = 4 × (-3) - 2 × 2 = -12 - 4 = -16 ≠ 0

  Donc il y a une solution unique.

- Quel est le nombre de solutions du système : $\begin{cases} x-y+1=0 \\ -3x+3y-3=0 \end{cases}$

  $\begin{cases} x-y+1=0 \\ -3x+3y-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=-1 \\ -3x+3y=3 \end{cases}$

  Det = $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 3 \end{vmatrix}$ = 1 × 3 - (-1) × (-3) = 3 - 3 = 0

  Donc il y a soit une infinité de solutions, soit aucune solution.

  D'après l'exercice 1, il y a une infinité de solutions.

3. Résolution par le calcul – Méthode par substitution

Méthode par substitution :

Elle consiste à isoler l'une des deux inconnues dans l'une des équations puis à la remplacer dans l'autre équation.

Exemple : Résoudre le système $\begin{cases} 3x+2y=7 \\ x+2y=5 \end{cases}$

1. $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3\times 2 - 1\times 2 = 4 \neq 0.$ Donc le système admet une unique solution.

2. $\begin{cases} 3x+2y=7 \\ x+2y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2y=7 \\ x=5-2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(5-2y)+2y=7 \\ x=5-2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 15-6y+2y=7 \\ x=5-2y \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -4y=7-15=-8 \\ x=5-2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-\frac{8}{-4}=2 \\ x=5-2y=5-2\times 2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{S=\{(1\,;2)\}}$

Exercice 2 : Résoudre par le calcul les 3 systèmes suivants :

a. $\begin{cases} y-2x+1=0 \\ y-2x+3=0 \end{cases}$; b. $\begin{cases} x-y+1=0 \\ -2x+2y-2=0 \end{cases}$; c. $\begin{cases} 2x-y-1=0 \\ x-y+4=0 \end{cases}$

4. Résolution par le calcul – Méthode par combinaison linéaire

Méthode par combinaison linéaire :

Elle consiste à « faire disparaitre » une des deux variables inconnues de l'une des deux équations.
Pour la méthode et l'exemple, on va « faire disparaitre » la variable x dans la première équation :
1. On multiplie chaque membre de la première équation par le coefficient directeur de la variable x de la deuxième équation.
On multiplie chaque membre de la deuxième équation par le coefficient directeur de la variable x de la première équation.
2. On soustrait membres à membres les deux égalités.
Une inconnue (ici x) est alors simplifiée et on peut calculer la deuxième inconnue (ici y).
3. On peut alors remplacer l'inconnue calculée dans une des deux équations de départ. Cela nous permet de calculer l'autre inconnue.

Exemple : Résoudre le système $\begin{cases} 4x+2y = 2 \\ 2x-3y = 13 \end{cases}$

1. $\begin{cases} 4x+2y = 2 \\ 2x-3y = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+2y = 2 & \times 2 \\ 2x-3y = 13 & \times 4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 8\,x+4\,y = 4 \\ 8\,x-12\,y = 52 \end{cases}$

2. Soustraire les 2 égalités : $(8\,x+4\,y)-(8\,x-12\,y) = 4-52 \Leftrightarrow 16y = -48 \Leftrightarrow y = \boxed{-3}$

3. Trouver la deuxième inconnue : $4x+2\times(-3) = 2 \Leftrightarrow 4x = 2+6 = 8 \Leftrightarrow x = \boxed{2}$

$\boxed{S = \{(2\,;-3)\}}$