Exercice

Question 1

Une étude a été menée pour évaluer l'effet d'un nouveau médicament antihypertenseur sur la pression artérielle systolique (PAS) de patients. La PAS de 10 patients a été mesurée avant et après l'administration du médicament. Les résultats sont présentés dans le tableau ci-dessous (en mmHg) :

Patient	PAS avant	PAS après	D=Avant-Après
1	145	138	7
2	152	147	5
3	138	135	3
4	160	151	9
5	148	145	3
6	155	149	6
7	142	139	3
8	150	146	4
9	135	132	3
10	140	136	4

Au seuil de signification α=0.05, ce médicament a-t-il un effet significatif sur la baisse de pression artérielle systolique ?

Correction avec rédaction complète : Comparaison de 2 moyennes expérimentales en séries appariées, 10 pts

(2 pts)

On cherche à savoir le traitement sur la pression artérielle de patients hypertendus est efficace, autrement dit si la pression artérielle est plus basse après traitement qu'avant.

Comme les mesures sont effectuées sur les mêmes patients avant et après traitement, il s'agit de séries appariées : nous allons travailler sur **la variable D, différence** entre la pression artérielle Avant – Après.

Notons μ_D , la moyenne exacte de la différence D; m_D, sa moyenne estimée d'après les mesures observées; σ_D, l'écart-type exact de la différence D ; s_D , son écart-type estimé d'après les mesures observées.

m_D = 4,7 mm Hg ; s_D = 2,1 mm Hg

La question est donc maintenant de savoir si la moyenne de la différence est strictement positive. Pour répondre à cette question, nous posons les hypothèses suivantes :

(2 pts)

H0: Le traitement n'est pas efficace, $\mu_D = 0$

H1 : Le traitement est efficace, $\mu_D > 0$ (le test est unilatéral)

Le risque α est de 5 %.

(2 pts) Les conditions du test de Student sont alors :

- ***Normalité de la différence D des mesures (que nous supposons vérifiée)***

***(2 pts)* Nous calculons notre statistique de Student :**

$$t_{obs} = \frac{m_D}{s_D/\sqrt{n}} = 7.22$$

(2pts) Notre statistique de Student, en valeur absolue| t_{obs} | est supérieure à la valeur seuil $t_{th} = 1,83$ lue sur la table de Student à 9 ddl pour un test unilatéral à 5%.

Nous pouvons en conclure à un rejet de H0 : le traitement est efficace, ce médicament a un effet significatif sur la baisse de pression artérielle systolique.

Question 2

Deux lots d'un nouveau médicament générique (Lot A et Lot B) sont testés pour déterminer la quantité de principe actif (en mg) par comprimé. On prélève aléatoirement 10 comprimés de chaque lot et on mesure la quantité de principe actif. Les résultats sont les suivants :

Lot A : 98.5, 99.2, 101.3, 99.8, 100.5, 98.9, 100.1, 99.5, 100.8, 99.4

Lot B : 102.1, 101.5, 103.2, 102.8, 101.9, 102.5, 103.5, 102.3, 101.7, 102.9

a) Au seuil de signification α=0.05, y a-t-il une différence significative entre les variances de la quantité de principe actif des deux lots ?

Correction : Test de Fisher d'Égalité de 2 variances expérimentales en séries indépendantes (4 pts)

H0 : les 2 variances sont égales, $\frac{\sigma^2{}_A}{\sigma^2{}_B} = 1$

H1 : les 2 variances sont différentes, $\frac{\sigma^2{}_A}{\sigma^2{}_B} \neq 1$

Les conditions du test de Fisher sont alors la Normalité des 2 séries de mesures (que nous supposons vérifiée)

$$F_{obs} = \frac{s_A^2}{s_B^2} = \frac{0.77}{0.43} = 1,8$$

Notre statistique de Fisher F_{obs} est inférieure à la valeur seuil $F_{th} = 4.026$ lue sur la table de Fisher à 2,5% pour 9 degrés de libertés (ddl) au numérateur et 9 au dénominateur.

Donc non rejet de H0 : nous considérons que les 2 variances sont égales.

b) Comparez les moyennes de la quantité de principe actif des deux lots au seuil de signification α=0.01

Correction : Comparaison de 2 moyennes expérimentales en séries indépendantes (8 pts)

On cherche donc à savoir si la quantité de principe actif est la même dans les deux lots. Pour répondre à cette question, nous posons les hypothèses suivantes :

(1 pts)

H0: µA = µB

H1 : µA ≠ µB (le test est bilatéral)

Le risque α est de 1 %.

L'échantillon A contenant 10 individus (comme le B), nous traitons le cas d'une comparaison de deux moyennes expérimentales en séries indépendantes sur de petits échantillons.

(4 pts) Les conditions du test de Student sont alors :

- Normalité des 2 séries de mesures (que nous supposons vérifiée)
- Égalité des variances : Nous l'avons vérifié au risque α de 5% à la question précédente. Comme la zone d'acceptation de H0 est plus large à 1% qu'à 5%, l'hypothèse H0 d'égalité des 2 variances est a fortiori vérifiée à 1% quand elle l'a été à 5%.

Toutes les conditions sont réunies pour mener à bien un test de Student.

Puisque les 2 variances sont égales, nous pouvons calculer une variance commune : $s_{\mathrm{com}}^2 = 0.60\ mg^2$

(2 pts) Nous calculons notre statistique de Student :

$$\boldsymbol{t_{obs}} = \frac{\boldsymbol{m_A - m_B}}{\sqrt{\boldsymbol{s_{com}^2}\left(\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{n_A}} + \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{n_B}}\right)}} = \boldsymbol{-7.6}$$

(1 pts) Notre statistique de Student, en valeur absolue,| $\boldsymbol{t_{obs}}$ | est inférieure à la valeur seuil $\boldsymbol{t_{th} = 2,878}$ lue sur la table de Student à 1% , 18 ddl en bilatéral.

Nous en concluons à un rejet de H0 : la quantité de principe actif n'est pas la même dans les deux lots.

Question 3

Une équipe de recherche s'intéresse à la relation entre l'indice de masse corporelle (IMC) et le taux de cholestérol LDL (en mmol/L) chez un groupe de patients. Les données recueillies pour 7 patients sont présentées ci-dessous :

Patient	IMC (kg/m2)	Cholestérol LDL (mmol/L)
1	22.5	2.8
2	28.1	3.5
3	24.9	3.1
4	31.2	4.2
5	26.3	3.3
6	29.5	3.9
7	23.8	3.0

a) Calculez le coefficient de corrélation linéaire de Pearson entre l'IMC et le taux de cholestérol LDL.

b) Au seuil de signification α=0.05, existe-t-il une corrélation linéaire significative entre l'IMC et le taux de cholestérol LDL dans cette population ?

Correction : Test de corrélation 10 pts

a) (2 pts) r = 0,888 *(directement à la calculette ou avec la formule)*

b) (2 pts)

H0: Il n'existe pas de lien entre l'IMC et le taux de cholestérol LDL, ρ = 0

H1 : Il existe un lien entre l'IMC et le taux de cholestérol LDL, ρ ≠ 0 (le test est bilatéral)

Le risque α est de 5 %.

(2 pts) Les conditions du test de Student sont la binormalité de la série (âge, taux de cholestérol) (que nous supposons vérifiée)

(2 pts) : $t_{obs} = \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\sqrt{n-2} = 14.9$ ***avec r = 0,888 et n = 7***

(2 pts) $t_{obs} >$ $t_{th}(Student, 5\%, 5\ ddl) = 2,571$

Nous pouvons en conclure à un rejet de H0 : Il existe un lien entre l'IMC et le taux de cholestérol LDL.

Question 4

Dans une population de patients atteints d'une certaine pathologie, on sait que 30% présentent une résistance à un traitement de première ligne. Dans un essai clinique portant sur un nouveau traitement, on observe que sur un échantillon de 150 patients traités, 24 développent une résistance.

Au seuil de signification α=0.05, le pourcentage de résistance au nouveau traitement est-il différent du pourcentage observé avec le traitement de première ligne ?

Correction : Comparaison d'un % expérimental avec un % théorique (8 pts)

H0: πA = π = 0.30

H1 : πA ≠ π (le test est bilatéral)

(2 pts)

Avec $p_A = 0,16$

Les conditions du test Z sont tous les n*p et n*(1-p) > 5 : 150 * p_A = 24 et 150 * (1- π) = 45 : OK

(1 pts)

(2 pts) : $Z_{obs} = \frac{p_A - \pi}{\sqrt{\pi * (1-\pi)/n}} = -3,74$

(1pts) $|Z_{obs}| >$ $Z_{th}(N(0,1), 5\%, bilatéral) = 1,96$

(2 pts) Nous pouvons en conclure à un rejet de H0 : le pourcentage de résistance au nouveau traitement est différent du pourcentage observé avec le traitement de première ligne.