Examen corrigé – Seconde session

Durée de l'épreuve : 3 heures.

Aucun document n'est autorisé, ni aucun dispositif électronique.

Exercice 1 (Optimisation sous contraintes). **Partie I. Qualification des contraintes**

1. Il suffit de poser

$$\begin{cases} g_1(x,y) &=& x^2+y^2-4 \\ g_2(x,y) &=& x+2y-2 \\ g_3(x,y) &=& -x \end{cases}$$

2. On a

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2(x-3) \\ 2(y-2) \end{pmatrix} ; \nabla g_1(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} ; \nabla g_2(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} ; \nabla g_3(x,y) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. Montrons tout d'abord que les trois contraintes ne peuvent être actives en même temps. En effet, on aurait alors $x = 0$ et $x + 2y = 2$ donc $y = 1$. Mais alors $x^2 + y^2 = 1 \neq 4$ donc la première contrainte n'est pas active. Il reste donc trois cas à vérifier :

- Si g_1 est inactive, alors les gradients de g_2 et g_3 sont libres donc la qualification linéaire des contraintes est vérifiée.
- Si g_2 est inactive, alors les gradients de g_1 et g_3 sont libres, sauf si $y = 0$ et $x = 1/2$, mais g_3 est alors inactive et $\nabla g_1 \neq 0$ donc la qualification linéaire des contraintes est vérifiée.
- Si g_3 est inactive, alors les gradients de g_1 et g_2 sont libres, sauf si $y = 1$ et$x = 1/2$, mais alors g_1 est inactive et $\nabla g_2 \neq 0$ donc la qualification linéaire des contraintes est vérifiée.

4. Le système KKT est, avec $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \leqslant 0$,

$$\begin{cases} 2(x-3) &=& 2x\mu_1 + \mu_2 - \mu_3 \\ 2(y-2) &=& 2y\mu_1 + 2\mu_2 \\ \mu_1(x^2+y^2-4) &=& 0 \\ \mu_2(x+2y-2) &=& 0 \\ \mu_3 x &=& 0 \end{cases}$$

Partie II. Résolution du système KKT

5. On suppose $\mu_3 \neq 0$.

(a) Nous avons vu dans la première partie que les trois contraintes ne pouvaient être actives en même temps. Donc si $\mu_2, \mu_3 \neq 0$, alors $\mu_1 = 0$. Les conditions de complémentarités donnent alors $x = 0$ et $y = 1$, donc le système devient

$$\begin{cases} -6 &=& \mu_2 - \mu_3 \\ -2 &=& 2\mu_2 \end{cases}$$

La seconde équation donne $\mu_2 = -1$, et la première $\mu_3 = 5 > 0$ ce qui est impossible.

(b) Si $\mu_2 = 0$, sachant que $x = 0$, la première équation devient $-6 = -\mu_3$, ce qui donne $\mu_3 = 6 > 0$, qui est impossible.

6. On suppose désormais $\mu_3 = 0$

(a) Si tous les multiplicateurs sont nuls, alors on a $\nabla f(x, y) = 0$, donc $(x, y) = (3, 2)$. Or, ce point ne vérifie pas la première contrainte.

(b) Comme $\mu_2 \neq 0$, on a par complémentarité $x + 2y = 2$. D'autre part, le système devient

$$\begin{cases} 2(x-3) &= \mu_2 \\ 2(y-2) &= 2\mu_2 \end{cases}$$

ce qui en soustrayant à la seconde ligne le double de la première donne

$$2y - 4 = 4x - 12.$$

On trouve donc finalement $y = 0$ et $x = 2$. Ce point vérifie toutes les contraintes, et on a de plus $\mu_2 = -2 < 0$. On a donc bien un point critique sous contrainte.

(c) Comme $\mu_2 = 0$, le système devient

$$\begin{cases} 2x - 6 &= 2x\mu_1 \\ 2y - 4 &= 2y\mu_1 \end{cases}$$

Comme $1 - \mu_1 > 0$, on peut alors écrire

$$x = \frac{3}{1-\mu_1} = \frac{3}{2}\frac{2}{1-\mu_1} = \frac{3}{2}y.$$

(d) Comme $\mu_1 \neq 0$, on a $x^2 + y^2 = 4$, donc $13y^2/4 = 4$. On en déduit que $y^2 = 16/13$ et donc que

$$x^2 = 4 - y^2 = \frac{36}{13}.$$

Comme de plus $x \geqslant 0$ par la troisième contrainte, on a $x = 6/\sqrt{13}$ et $y = 2x/3 = 4/\sqrt{13}$. Pour conclure, il suffit de remarquer que ce point ne vérifie pas la deuxième contrainte.

7. D'après ce qui précède, il y a un unique point critique sous contraintes, le point $(2, 0)$.

Partie III. Convexité

8. Nous allons calculer les Hessiennes de f et des contraintes :

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} ; H_{g_1}(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} ; H_{g_2}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; H_{g_3}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

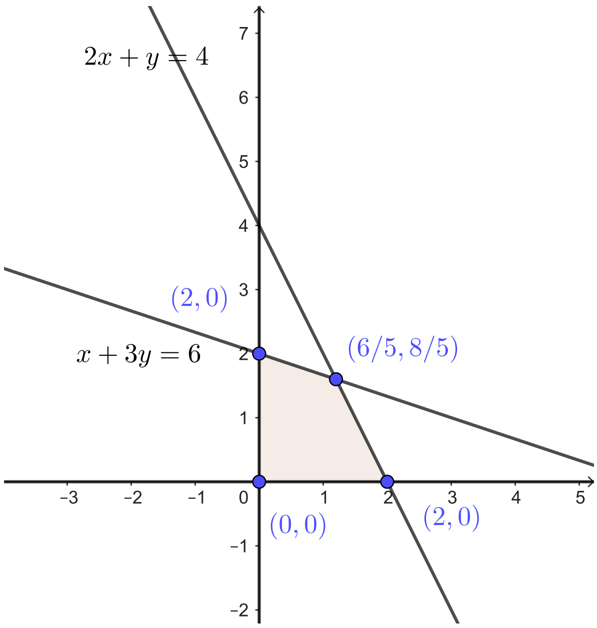
Dans tous les cas, on a une matrice positive, donc la fonction correspondante est convexe. Ainsi, f est convexe, de même que toutes les contraintes d'inégalité, donc le problème est convexe.

9. D'après le cours, pour un problème convexe, tout point critique sous contraintes est un minimum global. Ainsi, f possède un unique minimum global sous contraintes, atteint en $(2, 0)$ et valant

$$f(2, 0) = 5.$$

10. Tout d'abord, le problème est convexe et admet un minimum global. Ensuite, le point $(1, 0)$ vérifie $g_i(1, 0) < 0$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant 3$. Comme il n'y a pas de contrainte d'égalité, nous avons vérifié toutes les hypothèses du Théorème de Slater.

Exercice 2 (Optimisation linéaire). **1**. Voici la figure :



2. Pour trouver les sommets, il faut transformer deux inégalités en inégalités et calculer le point d'intersection des droites correspondantes.

- Si $x = 0$, alors on a soit $y = 0$, soit $x + 3y = 0$, auquel cas $y = 2$, soit $2x + y = 4$, auquel cas $y = 4$. Les points $(0, 0)$ et $(0, 2)$ vérifient bien les contraintes et sont donc des sommets, mais $(0, 4)$ ne l'est pas puisqu'il ne vérifie pas la première contrainte.
- Si $y = 0$, alors on a soit $x = 0$, soit $x = 6$, soit $2x = 4$, auquel cas $x = 2$. Les points $(0, 0)$ et $(2, 0)$ vérifient bien les contraintes et sont donc des sommets, mais $(0, 6)$ ne l'est pas car il ne vérifie pas la seconde contrainte.
- Si $x, y \neq 0$, alors on a $x + 3y = 0$ et $2x + y = 4$, ce qui donne comme unique solution $(x, y) = (6/5, 8/5)$. Ce point vérifie bien les contraintes, c'est donc un sommet.

En résumé les sommets de $\mathcal{P}$ sont :

$$(0, 0) \quad ; \quad (0, 2) \quad ; \quad (2, 0) \quad ; \quad \left(\frac{6}{5}, \frac{8}{5}\right).$$

3. Si un problème d'optimisation d'une fonction linéaire sous contraintes linéaires admet un extremum global, alors il existe un sommet sur lequel il est atteint.

4. D'après la question précédente, il suffit de calculer la valeur de f sur chaque sommet :

$$f(0, 0) = 0 \quad ; \quad f(0, 2) = 6 \quad ; \quad f(2, 0) = 4 \quad ; \quad f\left(\frac{6}{5}, \frac{8}{5}\right) = \frac{36}{5}.$$

La plus grande valeur est la dernière, c'est donc le maximum global de f sous contraintes.

Exercice 3 (Optimisation sous contraintes mixtes). On considère les fonctions $f, g, h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2} \quad ; \quad g(x, y) = 2x - y - 5 \quad ; \quad h(x, y) = x$$

Le but de cet exercice est de déterminer le minimum de f sous les contraintes $g = 0$ et $h \leqslant 0$.

1. Le but de cette question est de montrer la qualification des contraintes.

(a) On a

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad ; \quad \nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(b) On peut prendre par exemple $v = (1,2)$, qui est bien orthogonal à $\nabla g(x,y)$ pour tous x, y. On vérifie alors directement que $\langle v, \nabla h(x,y)\rangle = 1 \neq 0$ pour tous les points (x,y).

(c) Tout d'abord, ∇g ne s'annule pas, donc les contraintes d'égalité sont qualifiées. De plus, en posant $\xi_0 = -v$, on a

$$\xi_0 \in \nabla g(x,y)^{\perp} \quad \& \quad \langle \xi_0, \nabla h(x,y)\rangle = -1 < 0.$$

Ainsi, les contraintes mixtes sont bien qualifiées en tout point.

2. Le système KKT s'écrit, pour $\mu \leqslant 0$,

$$\begin{cases} x &= 2\lambda + \mu \\ y &= -\lambda \\ \mu x &= 0 \end{cases}$$

3. (a) Si $\mu = 0$, les deux premières équations donnent $x = -2y$. En injectant dans la contrainte $g(x,y) = 0$, on trouve alors $-5y - 5 = 0$, soit $y = -1$ et donc $x = 2$.

(b) Si $\mu \neq 0$, alors la condition de complémentarité donne $x = 0$. En injectant dans la contrainte $g(x,y) = 0$, on trouve alors $-y - 5 = 0$ et donc $y = -5$. On en déduit que $\lambda = 5$ et finalement que $\mu = -10 < 0$. C'est donc bien une solution.

(c) Nous avons trouvé deux solutions au système, à savoir $(2,-1)$ et $(0,-5)$. Seule la seconde vérifie la contrainte d'inégalité, c'est donc l'unique point critique sous contraintes.

4. On peut remarquer que f est convexe puisque sa Hessienne en tout point est $H_f(x,y) = 2\mathrm{I}_2$ qui est définie positive. De plus, la contrainte d'égalité est linéaire et la contrainte d'inégalité, étant linéaire est convexe. Ainsi, nous avons un problème convexe, et d'après le cours tout point critique sous contraintes est un extremum global. Le minimum global de f sous contraintes est donc atteint en $(0,-5)$ et vaut $f(0,-5) = 25/2$.

5. Si on ne considère que la contrainte d'égalité, il suffit de poser $\mu = 0$ dans le système KKT. On trouve alors un unique point critique, qui est $(2,-1)$. À nouveau, la convexité du problème assure que ce point critique est un extremum global, auquel f vaut $f(2,-1) = 5/2$. Par ailleurs, comme $f(n,n) \to +\infty$, f n'admet pas de maximum global sous contraintes, donc nous venons de trouver son minimum global.