TD I – Révisions

1 Topologie des espaces vectoriels de dimension finie

Exercice 1.1 (Normes)**.** Pour $x \in \mathbb{R}^n$, on note

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \quad ; \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \quad ; \quad \|x\|_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|.$$

1. Vérifier que ces trois fonctions sont des normes.

2. Rappeler la démonstration de l'Inégalité de Cauchy-Schwarz : pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$\langle x, y \rangle \leqslant \|x\|_2 \|y\|_2.$$

3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_1 \leqslant n\|x\|_\infty \quad \& \quad \|x\|_\infty \leqslant \|x\|_2 \leqslant \sqrt{n}\|x\|_\infty.$$

Dans toute la suite, pour un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$, on note $\|x\|$ (sans l'indice 2) sa norme euclidienne, qui est associé au produit scalaire canonique noté $\langle , \rangle$.

Exercice 1.2 (Topologie des boules)**.** **1**. En utilisant la définition du cours, montrer que les boules ouvertes sont des ouverts.

2. En utilisant la définition du cours, montrer que les boules fermées sont des fermés.

3. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$. Montrer que si F est un fermé tel que $B(x, r) \subset F$, alors $B_f(x, r) \subset F$.

4. En déduire l'adhérence d'une boule ouverte.

Exercice 1.3 (Caractérisation séquentielle des fermés ★)**.** Montrer qu'une partie F de $\mathbb{R}^n$ est fermée si et seulement si pour toute suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de F qui converge vers une limite x, on a $x \in F$.

Exercice 1.4 (Bord ★)**.** Pour une partie A de $\mathbb{R}^n$, on définit le *bord de A* (aussi appelé *frontière* de A) comme

$$\partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A}.$$

1. Montrer que $\mathbb{R}^n \setminus \mathring{A} = \overline{\mathbb{R}^n \setminus A}$. En déduire que ∂A est fermé.

2. Montrer que

$$\partial A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall\, \epsilon > 0, B(x, \epsilon) \cap A \neq \emptyset \quad \& \quad B(x, \epsilon) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) \neq \emptyset\}.$$

3. Montrer que le bord de A et celui de son complémentaire sont égaux.

4. Montrer que A est fermé si et seulement si $\partial A \subset A$.

5. Montrer que A est ouvert si et seulement si $\partial A \cap A = \emptyset$.

Exercice 1.5 (Partie définie par des inégalités ★)**.** Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soient $h_1, \cdots, h_p : U \to \mathbb{R}$ des fonctions continues. On considère l'ensemble

$$\mathcal{D} = \{x \in U \mid h_i(x) \leqslant 0 \text{ pour tout } 1 \leqslant i \leqslant p\}.$$

1. Montrer que $\mathcal{D}$ est fermé.

2. Montrer que l'ensemble

$$\mathcal{D}' = \{x \in U \mid h_i(x) < 0 \text{ pour tout } 1 \leqslant i \leqslant p\}$$

est ouvert.

3. Soit $x \in \partial U$, montrer qu'il existe $1 \leqslant i \leqslant p$ vérifiant $h_i(x) = 0$.

4. Donner un exemple pour lequel $\mathcal{D}'$ n'est pas égal à l'intérieur de $\mathcal{D}$.

Exercice 1.6 (Normes sur les espaces de matrices)**.** On fixe un entier $n \in \mathbb{N}$ et on définit sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ la quantité suivante :

$$N_1(M) = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Mx\|}{\|x\|}.$$

1. Montrer que N_1 est une norme sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\|Mx\| \leqslant N_1(M)\|x\|.$$

3. On définit maintenant une autre fonction

$$N_2(M) = \sqrt{\mathrm{Tr}(M^t M)}.$$

Soit $\Phi : \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{n^2}$ l'application qui à une matrice associe le vecteur obtenu en écrivant ses colonnes les unes sous les autres. Montrer que $N_2(M) = \|\Phi(M)\|$ et en déduire que N_2 est une norme.

Exercice 1.7 (Formes linéaires ★)**.** Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une forme linéaire.

1. Montrer qu'il existe un vecteur $v_f \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$f(x) = \langle v_f, x \rangle$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

2. Le vecteur v_f est-il unique ?

2 Continuité

Exercice 2.1 (Pour se faire la main)**.** Pour chacune des fonctions suivantes, donner son ensemble de définition et dire en justifiant en quels points elle est continue.

1. $f_1(x, y) = \ln(x + y)$;

2. $f_2(x, y) = \dfrac{1}{\cos(x + y)}$;

3. $f_3(x, y) = xyx^2 + y^2$;

4. $f_4(x, y) = \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2}$.

Exercice 2.2 (Caractérisations de la continuité ★)**.** Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une fonction.

1. En partant de la définition du cours, montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

   i) La fonction f est continue ;
   ii) Pour tout ouvert U de $\mathbb{R}^m$, sa préimage $f^{-1}(U)$ par f est un ouvert ;
   iii) Pour tout fermé F de $\mathbb{R}^m$, sa préimage $f^{-1}(F)$ par f est un fermé.

2. On suppose maintenant f linéaire. Montrer que $\ker(f) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 0\}$ est fermé.

Exercice 2.3 (Inversion de matrices)**.** Soit n un entier.

1. Montrer que l'application déterminant $\det : \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est continue.

2. En déduire que l'ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ des matrices inversibles est ouvert.

3. Montrer que l'application $A \mapsto A^{-1}$ est continue.

4. Est-ce un homéomorphisme ?

Exercice 2.4 (Matrices de trace nulle)**.** 1. Soit $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices de taille $n \times n$ qui sont toutes de trace nulle. Si $A_k \to A$, justifier que A est également de trace nulle.

2. Qu'en déduit-on sur l'ensemble $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})_0$ des matrices de trace nulle ?

3. Retrouver ce résultat à l'aide de l'application trace $\mathrm{Tr} : \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$.

3 Compacité

Exercice 3.1 (Caractérisation de la compacité ★)**.** Le but de cet exercice est de démontrer que les compacts de $\mathbb{R}^n$ sont les parties fermées et bornées.

1. Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un compact.

   (a) Montrer que K est fermé.
   (b) Supposons que K ne soit pas borné et considérons une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de K telle que $\|x_k\| \to +\infty$. Utiliser la compacité pour obtenir une contradiction.

2. On considère maintenant une partie $F \subset \mathbb{R}^n$ fermée et bornée. Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de F.

(a) On note $x_k(i)$ la i-ième coordonnée du vecteur x_k. Montrer qu'il existe une sous-suite

$$(x_{\varphi_1(k)}(1))_{k\in\mathbb{N}}$$

de la suite $(x_k(1))_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers une limite ℓ_1.

(b) Montrer de même qu'il existe une sous-suite $(x_{\varphi_1\circ\varphi_2(k)}(2))_{k\in\mathbb{N}}$ de la suite $(x_{\varphi_1(k)}(2))_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers une limite ℓ_2.

(c) En s'inspirant des deux questions précédentes, conclure que F est compacte.

3. Montrer que l'ensemble $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ des matrices orthogonales est compact.

4. L'ensemble des projecteurs de $\mathbb{R}^n$ est-il compact ?

Exercice 3.2 (Fonction tendant vers l'infini ★). On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tend vers l'infini si

$$f(x) \underset{\|x\|\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Nous allons montrer qu'une fonction tendant vers l'infini admet toujours un minimum global.

1. Écrire à l'aide de quantificateurs la définition précédente.

2. Montrer que si f tend vers l'infini, alors il existe $R > 0$ tel que pour tout x vérifiant $\|x\| > R$, on a $f(x) > f(0)$.

3. En déduire que f admet un minimum global.

4 Optimisation à une variable

Exercice 4.1 (La formule de Wilson). Une entreprise produit des biens en utilisant un matériau particulier. Il lui faut donc régulièrement commander une certaine quantité de ce matériau, qui sera ensuite utilisée progressivement jusqu'à épuisement. Le but de cet exercice est de déterminer la meilleur périodicité pour la commande : si on commande tous les T jours, quel est le T qui minimise le coût ? En notant k la quantité de matériau nécessaire chaque jour, on commandera donc une quantité $Q = Tk$ tous les T jours.

1. Une première partie du coût est due au stockage (ce qui inclut la manutention, la conservation, l'utilisation d'espace, etc.) du matériau. On suppose que stocker une quantité Q de matériau pendant un jour coûte c_sQ pour une constante $c_s > 0$. Quel est le coût de stockage moyen par jour sur T jours ?

2. La seconde partie du coût est due à l'achat (ce qui inclut la transaction commerciale, mais aussi le transport, les frais bancaire, les impôts). On note c_a le coût d'achat, ce sorte que le coût d'achat par unité de temps est c_a/T. En déduire le coût total $C(T)$ par unité de temps quand la période de commande est égale à T.

3. Déterminer la valeur de T qui minimise $C(T)$.

4. Quelle est la quantité Q de matériau à acheter à chaque fois ?

Exercice 4.2 (Étudier plus pour réussir plus). Vous planifiez vos révisions pour deux examens E_1 et E_2. Les deux ont le même coefficient, mais vous êtes meilleur dans la matière de E_1 que dans celle de E_2. Concrètement, vous estimez qu'en fonction du temps t passé à travailler, votre note sur 100 à chacun des examens sera

$$N_1(t_1) = 20 + 20\sqrt{t_1} \quad \& \quad N_2(t_2) = -80 + 3t_2.$$

Vous disposez de 60 heures de révisions, à répartir entre le temps t_1 passé à préparer E_1 et le temps t_2 passé à préparer E_2.

1. Pour quelles valeurs de t_1 et t_2 les expressions ci-dessus ont-elles un sens ?

2. Quelle est la répartition du temps de travail qui vous donnera la meilleur moyenne finale ?