

Examen – Seconde session

Durée de l'épreuve : 3 heures.

Aucun document n'est autorisé, ni aucun dispositif électronique.

Exercice 1 (OPTIMISATION SOUS CONTRAINTES). On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = (x - 3)^2 + (y - 2)^2.$$

qu'on cherche à minimiser sous les contraintes

$$\begin{cases} x^2 + y^2 & \leq 4 \\ x + 2y & \leq 2 \\ x & \geq 0 \end{cases}$$

Partie I. Qualification des contraintes

1. Définir des fonctions $g_1, g_2, g_3 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de sorte que les contraintes s'écrivent $g_i(x, y) \leq 0$ pour $1 \leq i \leq 3$.
2. Calculer les gradients de f et des contraintes.
3. Montrer que les contraintes sont qualifiées en tout point.
4. On cherche le minimum de f sous les contraintes précédentes. Écrire le système KKT associé à ce problème.

Partie II. Résolution du système KKT

5. On suppose $\mu_3 \neq 0$.
 - (a) Si de plus $\mu_2 \neq 0$, montrer que $\mu_1 = 0$ et conclure.
 - (b) Si maintenant $\mu_2 = 0$, montrer qu'il n'y a pas de solution.
6. On suppose désormais $\mu_3 = 0$
 - (a) Montrer qu'on ne peut avoir de plus $\mu_1 = 0 = \mu_2$.
 - (b) On suppose donc $\mu_1 = 0$ et $\mu_2 \neq 0$, montrer que le système possède une solution et la calculer.
 - (c) Si maintenant $\mu_2 = 0$ et $\mu_1 \neq 0$, montrer que $2x = 3y$.
 - (d) En déduire que $y^2 = 16/13$ et $x^2 = 36/13$ et conclure.
7. Quels sont les points critiques sous contraintes ?

Partie III. Convexité

8. Montrer qu'il s'agit d'un problème convexe.
9. En déduire le minimum de f sous contraintes.
10. Montrer que le THÉORÈME DE SLATER s'applique à ce problème.

Exercice 2 (OPTIMISATION LINÉAIRE). Le but de cet exercice est de déterminer le **maximum** de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = 2x + 3y$$

sous les contraintes

$$\begin{cases} x + 3y & \leq 6 \\ 2x + y & \leq 4 \\ x, y & \geq 0 \end{cases}$$

1. Représenter graphiquement l'ensemble $\mathcal{P}$ des points du plan vérifiant les contraintes.
2. Calculer tous les sommets de $\mathcal{P}$.
3. Énoncer de façon précise le THÉORÈME DE LA SOLUTION-SOMMET.
4. Déterminer le maximum de f sous contraintes.

Exercice 3 (OPTIMISATION SOUS CONTRAINTES MIXTES). On considère les fonctions $f, g, h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définies par

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2} \quad ; \quad g(x, y) = 2x - y - 5 \quad ; \quad h(x, y) = x$$

Le but de cet exercice est de déterminer le minimum de f sous les contraintes $g = 0$ et $h \leq 0$.

1. Le but de cette question est de montrer que les contraintes sont qualifiées.
 - (a) Calculer les gradients des fonctions f , g et h .
 - (b) Donner un vecteur $v \in \mathbb{R}^2$ tel que $v \perp \nabla g(x, y)$ et $\langle v, \nabla h(x, y) \rangle \neq 0$ pour tous les points (x, y) satisfaisant les contraintes.
 - (c) Conclure.
2. Écrire le système KKT associé à ce problème.
3. On souhaite maintenant résoudre ce système
 - (a) Résoudre le système dans le cas $\mu = 0$.
 - (b) Résoudre le système dans le cas $\mu \neq 0$.
 - (c) En déduire le ou les points critiques sous contraintes.
4. Quel est le minimum de f sous les contraintes $g = 0$ et $h \leq 0$?
5. Quel est le minimum de f sous la seule contrainte $g = 0$?