Rattrapage MEU 204

Exercice 1 : Soient $a = 955, b = 183$.

1. Calculer le $pgcd(a, b)$
2. Déterminer deux entiers u, v qui vérifient $au + bv = pgcd(a, b)$

Exercice 2 : Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, on a : 10 divise $2^{2^n} - 6$.

Exercice 3 : Déterminer tous les entiers a, b qui vérifient :
$pgcd(a, b) + ppcm(a, b) = a + b$

Exercice 4 : Soit n un entier naturel et non nul, on suppose que tout diviseur premier p de n , p^2 ne divise pas n et $p - 1$ divise $n - 1$.

Le but de cet exercice est de montrer le résultat suivant : $a^n \equiv a[n]$ pour tout entier a. Soit $n = \prod_{i=1}^{r} p_i$ la décomposition en facteur premier de n . [$p_i \neq p_j$ si $i \neq j$]

1. Soit a un entier , on suppose que p_i ne divise pas a. Justifier que : $a^{p_i - 1} \equiv 1[p_i]$.
2. En déduire que $a^{n-1} \equiv 1[p_i]$.
3. On suppose que p_i divise a. Montrer que $a^n \equiv a[p_i]$.
4. Conclure .
5. Donner la décomposition en facteurs premiers du nombre 561. Peut-on conclure que $a^{561} \equiv a[561]$?

Exercice 5 : On considère l'anneau $A = \mathbf{Z}/49\mathbf{Z}$, On rappelle que A^* désigne l'ensemble des éléments inversibles de A.

1. Montrer que A^* muni de la multiplication est un groupe .
2. Quel est le cardinal de A^*?
3. On pose $a = (\bar{-2})$. Calculer $a^2, a^3, a^6, a^{14}, a^{21}$. Quel est l'ordre de a?
4. En déduire que A^* est cyclique et qu'il possède 12 générateurs .

Exercice 6 : Soit $n \geq 2$ un entier naturel avec sa décomposition en facteurs premiers $n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}$. On définit $d(n)$ comme étant le nombre de diviseurs positifs de n.

1. Calculer $d(40)$.
2. Calculer $d(p^m)$ où p est premier et m un entier.
3. En déduire que $d(n) = \prod_{i=1}^{r}(1+\alpha_i)$
4. Que peut-on dire d'un entier n si on a $d(n) = 2$?
5. Caractériser les entiers naturels n qui vérifient $d(n)$ impair .