université PARIS-SACLAY
FACULTÉ JEAN MONNET
DROIT-ÉCONOMIE-MANAGEMENT

Année Universitaire 2024 – 2025

Session 1 – Semestre 1

Licence 1 – Economie / Gestion

Mathématiques

Cours de P. Beau

Date de l'épreuve : 12/12/2024
Nature de l'épreuve : Pratique
Durée de l'épreuve : 3 heures
Documents autorisés : Aucun document. Calculatrices non programmables uniquement

Les téléphones portables et autres appareils de communication doivent être *éteints* et *déposés* avec les affaires personnelles de l'étudiant. **Toute sortie est définitive**, excepté en cas de *force majeure*, et l'étudiant doit obligatoirement rendre sa copie avant de quitter la salle.

Tous les calculs et les raisonnements doivent être justifiés rigoureusement et détaillés, en s'appuyant sur les définitions et les résultats vus en cours.

Les différents exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

Il est toujours possible d'admettre clairement le résultat d'une question pour traiter les suivantes. Ne perdez pas de temps sur les questions qui vous résistent.

Table des dérivées usuelles :

D(f)	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^*$	$]0\,;+\infty[$	$[0,+\infty[$
f(x)	C,constante	ax + b	x^n, n entier positif	x^n, n entier négatif	x^a, a nombre réel	$\sqrt{x} = x^{1/2}$
D' (f)	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^*$	$]0\,;+\infty[$	$]0\,;+\infty[$
f ' (x)	0	a	$n\,x^{n-1}$	$n\,x^{n-1}$	$a\,x^{a-1}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}$

D(f)	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}\setminus\{\pi/2+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$	$]0\,;+\infty[$	$\mathbb{R}$
f(x)	sin x	cos x	tan x	ln x	exp(a x), a nombre réel
D' (f)	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}\setminus\{\pi/2+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$	$]0\,;+\infty[$	$\mathbb{R}$
f ' (x)	cos x	- sin x	$1+\tan^2 x$	1/x	a exp(ax)

u,v désignent des fonctions définies et dérivables sur un même intervalle.

Fonction	u+ v	$u\times v$	$\frac{u}{v}$	a u ($a\in\mathbb{R}$)	u^n, n nombre	exp(u)	ln(u)	$\sqrt{u}$
Dérivée	u ' + v '	$u'\times v+u\times v'$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$	a u '	$n\,u^{n-1}\,u'$	u' exp(u)	$\frac{u'}{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$

v désigne une fonction définie sur un intervalle I, u une fonction dérivable sur l'intervalle v(I).

Fonction	u(v)
Dérivée	$v'\times u'(v)$

Quelques développements limités usuels : ε désigne une fonction ayant pour limite 0 en 0.

$\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n+x^n\varepsilon(x)$. $\ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+x^n\varepsilon(x)$

$(1+x)^k = 1+kx+\frac{k(k-1)}{2}x^2+\frac{k(k-1)(k-2)}{2\times3}x^3+\ldots+\frac{k(k-1)(k-2)\ldots(k-n+1)}{n!}x^n+x^n\varepsilon(x)$ $(k\in\mathbb{R})$

$e^x = 1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+x^n\varepsilon(x)$ (rappel : $n!=n\times(n-1)\times(n-2)\times\ldots\times2\times1$)

Exercice 1 2 points/30

Question 1 Evaluer $\lim_{x \to 0} \left(\frac{\ln(5+x) - \ln(5)}{x} \right)$ à l'aide d'une dérivation – on pourra remarquer que $x = x - 0$ --.

Rappel : Vous devez vous fonder sur les définitions et les propriétés du cours. Si vous utilisez une propriété qui n'est pas dans le cours, il vous faut d'abord la démontrer.

Exercice 2 2,5 points/30

Question 2 Résoudre – on demande une expression exacte, pas une approximation -- l'équation d'inconnue j, nombre réel : $(1+j)^7 = 2$.

On considère l'équation d'inconnue i , nombre réel positif: $\frac{(1+i)^{10} \times (1+i)^{-2}}{(1+i)^4} \sqrt[5]{1+i} = 2$

Question 3 Simplifier cette expression

Question 4 Puis résoudre cette équation – on demande une expression exacte, pas une approximation –.

Exercice 3 11,5 points/30

On considère les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^3$: s = (1; -1; -9) , u = (1; 2; 3), v = (2; 3; 2), w = (-m ; -1 ; 1+ m) , m désigne un nombre réel.

Question 5 Pour quelle(s) valeur(s) de m les vecteurs u,v,w forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$?

Question 6 On suppose ici m = 1. Trouver les coordonnées dans la base (u,v,w) du vecteur (0;1;4) en détallant bien les calculs.

On considère le sous-ensemble E de $\mathbb{R}^3$ défini ainsi : $E = \{(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3\,; 5x - 4y + z = 0\}$.

Question 7 Montrer, sans utiliser le résultat de la question suivante, que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Question 8 Trouver une famille génératrice, puis une base, de E.

Question 9 Trouver la dimension de E. Ne pas oublier de justifier votre réponse, en vous fondant sur les résultats du cours.

Question 10 Montrer que les vecteurs s, u et v appartiennent à E.

Question 11 Montrer que u et v forment une base de E.

Question 12 Evaluer avec le moins possible de calculs le rang de la famille de vecteurs s,u,v.

Exercice 4 6 points/30

On définit une fonction f sur]-5; + ∞[ainsi : $\begin{cases} \text{pour tout } x \text{ de }]-5\,;0[\cup]0\,;+\infty[& f(x) = \frac{\ln(5+x) - \ln(5)}{x} \\ \text{pour } x = 0 & f(x) = f(0) = \frac{1}{5} \end{cases}$

Question 13 Trouver un développement limité à l'ordre 2, au voisinage de $x = 0$, de ln(1+x).

Question 14 Montrer que pour tout x de $]-5;+\infty[$, $\ln(5+x) = \ln(5) + \frac{x}{5} - \frac{x^2}{50} + x^2 \varepsilon(x)$ avec $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

Question 15 Evaluer $\lim_{x \to 0} \left(\frac{\ln(5+x) - \ln(5)}{x} \right)$ à l'aide d'une méthode différente de celle utilisée à la question 1.

Question 16 Evaluer $\lim_{x \to 0} \left(\frac{\ln(5+x) - \ln(5) - (x/5)}{x^2} \right)$.

Question 17 f est-elle continue en 0 ? **Question 18** f est-elle dérivable en 0 ? Si oui, quelle est sa dérivée en 0?

Tourner la page S.V.P -->

Exercice 5 4,5 points/30

On définit sur $\mathbb{R}^2$ une fonction g ainsi : (pour tout (x,y) de $\mathbb{R}^2$) $g(x,y) = x^2 y + y^3 + 1$

Question 19 Calculer la différentielle de g au point (x,y) .

Question 20 Donner en particulier la différentielle de g en (2; -1) et indiquer la signification de chacun des termes présents dans cette expression.

Question 21 Calculer les dérivées partielles secondes de g, vérifier si les conditions d'application du théorème de Schwarz sont réunies et comparer le résultat à ce qu'annonce ce théorème.

Exercice 6 3,5 points/30

On définit une fonction q sur $[0, +\infty[$ ainsi : (pour tout x de $[0, +\infty[$) $q(x) = 4\sqrt{x}+\exp(3x-3)$.

Question 22 Etablir les variations de q.

Question 23 Montrer que q est une bijection de $[0, +\infty[$ dans $[\exp(-3), +\infty[$.

q admet donc une fonction réciproque, notée dorénavant q^{-1}

Question 24 Calculer $q(0)$, $q(1)$, $q^{-1}(5)$. **Question 25** Calculer $q^{-1}{}'(5)$, dérivée en 5 de q^{-1}.