

Examen final de Mai – algèbre linéaire

La précision des arguments utilisés et la qualité de la rédaction entreront pour une part importante dans l'appréciation de la copie. Merci de ne pas écrire au crayon à papier. L'utilisation de la calculatrice, du téléphone portable ou de tout objet connecté ainsi que des notes de cours/TD est interdite. Barème indicatif sur 30 points (Note ramenée sur 20 par coefficient 2/3).

Exercice 1. (5 points) Soit $f: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z, t) = (x + y, y - z, x + t)$.

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Montrer sans calculs que f ne peut pas être injective.
3. Ecrire la matrice de f sur les bases canoniques de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^3$.
4. Déterminer le rang de f par la méthode de votre choix (expliquer).

Exercice 2. (5 points) On considère dans $\mathbb{R}^2$ les sous-espaces vectoriels D_1 et D_2 définis par

$$D_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = -y\}, \quad D_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}.$$

1. Montrer que $D_1 \oplus D_2 = \mathbb{R}^2$. Pour tout $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, donner en coordonnées (en fonction de x et y) les vecteurs $u_1 \in D_1$ et $u_2 \in D_2$ de la décomposition $u = u_1 + u_2$ associée à la somme directe.
2. Soit $s: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$; $s(u) = u_1 - u_2$ où u_1 et u_2 sont les vecteurs calculés dans la question 1. Calculer les coordonnées de $s(x, y)$ pour tout (x, y) et calculer la matrice de s sur la base (pourquoi est-ce une base de $\mathbb{R}^2$?) $((0, 1), (1, -1))$ de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3. (10 points) Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs suivants : $u_1 = (3, 2, 1)$, $u_2 = (1, 1, 0)$, $u_3 = (1, 1, 1)$. On admet que $B = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. On pose $F = \text{Vect}(u_3)$ et on pose $G = \text{Vect}(u_1, u_2)$.

1. Déterminer un système d'équations (cartésiennes) de G .
2. Déterminer les dimensions de G et F et montrer que ce sont deux espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.
3. Soit $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire déterminée par $f(u_1) = 0$, $f(u_2) = 0$, $f(u_3) = u_3$. Quelle est la matrice A de f dans la base B ? Reconnaissez-vous de quel type d'application linéaire il s'agit ? si oui, laquelle ?
4. Ecrire la matrice de passage de la base canonique B_{can} de $\mathbb{R}^3$ à B .
5. Calculer la matrice de f dans la base canonique.

Exercice 4. (10 points) Soit $\mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3. Pour toute la suite de l'exercice, on appelle $f: \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}_3[X]$, l'application définie par si $f(P) = P + 2P' + 4P''$ où P' est le polynôme dérivé de P et P'' le polynôme dérivée seconde.

1. Vérifier que f est une application linéaire.
2. Calculer $f(X^j)$ pour $j = 0, 1, 2, 3$.
3. Ecrire la matrice A de f sur la base canonique $(1, X, X^2, X^3)$.
4. Calculer l'inverse de la matrice A par la matrice augmentée ou par le système associé.
5. A l'aide du calcul de A^{-1} de la question précédente, montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}_3[X]$, $f^{-1}(P) = P - 2P' + 8P''$ où P'' est le polynôme dérivée troisième de P .