Corrigé- Examen final de Mai – algèbre linéaire

Exercice 1. (5 points) Soit $f\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z,t) = (x+y, y-z, x+t)$.

1. Montrer que f est une application linéaire.
   On prend $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$ et $u = (x,y,z,t), u' = (x',y',z',t') \in \mathbb{R}^4$. Alors
$$\begin{aligned} f(\lambda u + \lambda' u') &= f(\lambda x + \lambda' x', \lambda y + \lambda' y', \lambda z + \lambda' z', \lambda t + \lambda' t') \\ &= (\lambda x + \lambda' x' + \lambda y + \lambda' y', \lambda y + \lambda' y' - (\lambda z + \lambda' z'), \lambda x + \lambda' x' + \lambda t + \lambda' t') \\ &= (\lambda x + \lambda y, \lambda y - \lambda z, \lambda x + \lambda t) + (\lambda' x' + \lambda' y', \lambda' y' - \lambda' z', \lambda' x' + \lambda' t') \\ &= \lambda f(u) + \lambda' f(u'). \end{aligned}$$
2. Montrer sans calculs que f ne peut pas être injective.
   Par le théorème du rang, $4 = \dim \operatorname{Ker} f + \operatorname{rg} f$. Or $\operatorname{rg} f \leqslant 3$ car f est à valeurs dans $\mathbb{R}^3$, donc $\dim \operatorname{Ker} f \geqslant 1$ et f n'est pas injective.
3. Ecrire la matrice de f sur les bases canoniques de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^3$.
   C'est une matrice dans $M_{3,4}(\mathbb{R})$:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
4. Déterminer le rang de f par la méthode de votre choix (expliquer).
   Le rang de f est au plus égal à 3 et il est égal au rang des vecteurs colonnes de la matrice. Il suffit de garder 3 vecteurs colonnes au plus. Si on prend les 3 derniers vecteurs colonnes, et qu'on échelonne le système obtenu en faisant $L_2 - L_1 \to L_2$, on voit qu'il y a trois pivots et donc les trois derniers vecteurs colonnes forment une famille de rang 3. Le rang de f est donc égal à 3.

Exercice 2. (5 points) On considère dans $\mathbb{R}^2$ les sous-espaces vectoriels D_1 et D_2 définis par
$$D_1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = -y\}, \quad D_2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}.$$

1. Montrer que $D_1 \oplus D_2 = \mathbb{R}^2$. Pour tout $u = (x,y) \in \mathbb{R}^2$, donner en coordonnées (en fonction de x et y) les vecteurs $u_1 \in D_1$ et $u_2 \in D_2$ de la décomposition $u = u_1 + u_2$ associée à la somme directe.
   Si $u = (x,y) \in D_1 \cap D_2$, on a $x = -y$ et $x = 0$. Donc $u = (0,0)$. La somme est donc directe. Si $u \in \mathbb{R}^2$, on écrit $u = (x,-x) + (0, x+y)$. Donc en posant $u_1 = (x,-x) \in D_1$ et $u_2 = (0, x+y) \in D_2$, on a aussi montré que $u = u_1 + u_2 \in D_1 + D_2$. On a donc que $\mathbb{R}^2 = D_1 + D_2$.
2. Soit $s\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2; s(u) = u_1 - u_2$ où u_1 et u_2 sont les vecteurs calculés dans la question 1. Calculer les coordonnées de $s(x,y)$ pour tout (x,y) et calculer la matrice de s sur la base (pourquoi est-ce une base de $\mathbb{R}^2$?) $((0,1),(1,-1))$ de $\mathbb{R}^2$.
   Si $u = (x,y)$, on a $s(x,y) = s(u) = u_1 - u_2 = (x,-x) - (0, x+y) = (x, -2x-y)$. D'où $s(0,1) = (0,-1)$ et $s(1,-1) = (1,-1)$. Les deux vecteurs sont indépendants car non co-linéaires, donc ils forment une base et la matrice de s sur cette base s'écrit $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 3. (10 points) Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs suivants : $u_1 = (3, 2, 1)$, $u_2 = (1, 1, 0)$, $u_3 = (1, 1, 1)$. On admet que $B = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. On pose $F = \mathrm{Vect}(u_3)$ et on pose $G = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$.

1. Déterminer un système d'équations (cartésiennes) de G.
   On cherche les équations de compatibilité du système $(x, y, z) = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$. On a

$$\left\{\begin{array}{ccccc} 3\lambda_1 & + & \lambda_2 & = & x \\ 2\lambda_1 & + & \lambda_2 & = & y \\ \lambda_1 & & & = & z \end{array}\right. \sim \left\{\begin{array}{ccccc} 3\lambda_1 & + & \lambda_2 & = & x \\ & & \lambda_2 & = & 3y-2x \\ \lambda_1 & & & = & z \end{array}\right. \sim \left\{\begin{array}{ccc} 0 & = & x-3z-(3y-2x) \\ \lambda_2 & = & 3y-2x \\ \lambda_1 & = & z \end{array}\right.$$

   en faisant $3L_2 - 2L_1 \to L_2$ puis $L_1 - 3L_3 - L_2 \to L_1$. En simplifiant, l'équation cartésienne de G est $x - y - z = 0$.

2. Déterminer les dimensions de G et F et montrer que ce sont deux espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.
   G est engendré par deux vecteurs non liés car extraits d'une base. Donc $\dim G = 2$. F est engendré par un vecteur non nul donc $\dim F = 1$. On sait que $G + F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3) = \mathbb{R}^3$. De plus, $u_3 \notin G$ car u_3 ne vérifie pas l'équation cartésienne de G. Donc $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.

3. Soit $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire déterminée par $f(u_1) = 0$, $f(u_2) = 0$, $f(u_3) = u_3$. Quelle est la matrice A de f dans la base B ? Reconnaissez-vous de quel type d'application linéaire il s'agit ? si oui, laquelle ?
   La matrice de f dans la base B est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   C'est une matrice de projection : f est donc une projection.

4. Ecrire la matrice de passage de la base canonique B_{can} de $\mathbb{R}^3$ à B.
   On range les coordonnées de u_1, u_2, u_3 en colonnes :

$$P_{B_{can},B} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Calculer la matrice de f dans la base canonique. On utilise la formule de changement de base $Mat_{B_{can}} f = P_{B_{can},B} A P_{B,B_{can}}$.
   Il faut inverser $P_{B_{can},B}$. On procède par la méthode par échelonnage et réduction. On fait successivement $3L_2 - 2L_1 \to L_2, 3L_3 - 3L_1 \to L_3$, puis $L_2 + L_3 \to L_3$ et $\frac{1}{3}L_3 \to L_3$, ensuite $L_1 - L_2 \to L_1, L_2 - L_3 \to L_2$ et $\frac{1}{3}L_1 \to L_1$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Donc

$$P_{B,B_{can}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Le calcul pour la matrice dans la base canonique de f donne

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4. (10 points) Soit $\mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3. Pour toute la suite de l'exercice, on appelle $f\colon \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}_3[X]$, l'application définie par si $f(P) = P + 2P' + 4P''$ où P' est le polynôme dérivé de P et P'' le polynôme dérivée seconde.

1. Vérifier que f est une application linéaire.
   Si $P, Q \in \mathbb{R}_3[X]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a $(\lambda P + \mu Q)' = \lambda P' + \mu Q'$ et $(\lambda P + \mu Q)'' = \lambda P'' + \mu Q''$. Donc
   $$f(\lambda P + \mu Q) = \lambda P + \mu Q + 2\lambda P' + 2\mu Q' + 4\lambda P'' + 4\mu Q'' = \lambda f(P) + \mu f(Q).$$
2. Calculer $f(X^j)$ pour $j = 0, 1, 2, 3$.
   On trouve
   $$\begin{aligned} f(1) &= 1 \\ f(X) &= X + 2 \\ f(X^2) &= X^2 + 4X + 8 \\ f(X^3) &= X^3 + 6X^2 + 24X. \end{aligned}$$
3. Ecrire la matrice A de f sur la base canonique $(1, X, X^2, X^3)$.
   On trouve que la matrice A vaut
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 24 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
4. Calculer l'inverse de la matrice A par la matrice augmentée ou par le système associé.
   On choisit le système associé d'inconnues (a_0, a_1, a_2, a_3) et de données (b_0, b_1, b_2, b_3). En remplaçant successivement de la dernière ligne vers la première
   $$\left\{\begin{array}{lllll} a_0 & +2a_1 & +8a_2 & & = b_0 \\ & a_1 & +4a_2 & +24a_3 & = b_1 \\ & & a_2 & +6a_3 & = b_2 \\ & & & a_3 & = b_3 \end{array}\right. \sim \left\{\begin{array}{lllll} a_0 = & b_0 & -2a_1 & -8a_2 \\ a_1 = & b_1 & -4(b_2 - 6b_3) & -24b_3 \\ a_2 = & b_2 & -6b_3 & \\ a_3 = & b_3 & & \end{array}\right.$$
   $$\sim \left\{\begin{array}{llll} a_0 = & b_0 & -2(b_1 - 4b_2) & -8(b_2 - 6b_3) \\ a_1 = & b_1 & -4b_2 & \\ a_2 = & b_2 & -6b_3 & \\ a_3 = & b_3 & & \end{array}\right.$$
   $$\sim \left\{\begin{array}{lllll} a_0 = & b_0 & -2b_1 & & +48b_3 \\ a_1 = & & b_1 & -4b_2 & \\ a_2 = & & & b_2 & -6b_3 \\ a_3 = & & & & b_3 \end{array}\right.$$
   Donc
   $$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 48 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. A l'aide du calcul de A^{-1} de la question précédente, montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}_3[X]$, $f^{-1}(P) = P - 2P' + 8P'''$ où P''' est le polynôme dérivée troisième de P.
   Par linéarité de f^{-1}, il suffit de vérifier que la formule est juste pour $P = 1, X, X^2, X^3$. On lit $f^{-1}(X^j)$ sur les vecteurs colonnes de A^{-1}. On a

$$f^{-1}(1) = 1 = (1) - 2(1)' + 8(1)'''$$

$$f^{-1}(X) = X - 2 = X - 2(X)' + 8(X)'''$$

$$f^{-1}(X^2) = X^2 - 4X = X^2 - 2(X^2)' + 8(X^2)'''$$

$$f^{-1}(X^3) = X^3 - 6X + 48 = X^3 - 2(X^3)' + 8(X^3)'''$$