

Contrôle continu 2 – algèbre linéaire -CORRIGÉ

Exercice 1 (vrai/faux). Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses, en justifiant par un contre-exemple lorsque l'assertion est fausse, et en donnant une démonstration ou en citant convenablement le cours sinon. Soit E un espace vectoriel. Les familles considérées sont des familles de E .

1. L'intersection de deux sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.
Vrai. cf cours.
2. L'union de deux sous-espaces vectoriels est un espace vectoriel.
Faux. Dans le cours il est présenté l'exemple de $\mathbb{R}(1,0) \cup \mathbb{R}(0,1)$ qui ne contient pas le vecteur $(1,1)$.
3. Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E alors $\dim F + \dim G = \dim(F + G)$.
Faux. Si on prend $F = G = \mathbb{R}u$ avec u vecteur non nul, alors $F + G = \mathbb{R}u$ et donc on aurait $2=1$.
4. La composée d'applications linéaires est linéaire.
Vrai, cf cours.
5. Une application linéaire f est surjective si $\text{Ker } f = \{0_E\}$.
Faux. Si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, x \mapsto (x,0)$, alors f est linéaire, son noyau est bien $\{0_{\mathbb{R}}\}$ mais son image ne contient pas $(0,1)$.
6. Une application linéaire $f: \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}^3$ est injective si $\text{rg}(f) = 3$.
Vrai. C'est une conséquence du théorème du rang entre deux espaces vectoriels de dimension 3.
7. Une application linéaire $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ n'est jamais surjective.
Vrai. On a que $\dim(\text{Im } f)$ est inférieure à la dimension de $\mathbb{R}^2$ par la formule du rang. Donc $\text{Im } f$ est un sous-espace vectoriel strict de $\mathbb{R}^3$.
8. Soit $h \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. L'application $\varphi: \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f \mapsto fh$ est linéaire.
Vrai. Il s'agit du produit des fonctions f et $h : (fh)(x) = f(x)h(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ et $f_1, f_2 \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ alors $\varphi(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)h = \lambda_1 f_1 h + \lambda_2 f_2 h = \lambda_1 \varphi(f_1) + \lambda_2 \varphi(f_2)$.

Exercice 2. Dans $\mathbb{R}^5$, on prend le sous-espace vectoriel

$$E = \{u = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 : x_1 + x_4 - x_5 = 0, x_1 - x_4 = 0, 2x_4 - x_5 = 0\}.$$

Soient e_i les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^5$: $e_1 = (1, 0, 0, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, 0, 0)$, etc. Soit $F = \text{Vect}(e_4, e_5)$.

1. Montrer que $E \cap F = \{0_{\mathbb{R}^5}\}$.
Si $u = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in E \cap F$, alors $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ car $u \in F$. Ensuite, comme $u \in E$, $x_4 - x_5 = 0$ et $x_4 = 0$, et enfin $x_5 = 0$. Ceci montre $u = 0_{\mathbb{R}^5}$.
2. Déterminer une base de E . Quelle est sa dimension ?
Soit $u = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5$. Alors $u \in E$ ssi $x_4 = x_1$ et $x_5 = 2x_1$ ssi $u = x_1(1, 0, 0, 1, 1) + x_2 e_2 + x_3 e_3$. On a trois inconnues secondaires x_1, x_2, x_3 . Donc une base est déterminée par la famille $((1, 0, 0, 1, 1), e_2, e_3)$. La dimension de E est donc 3.

3. Montrer sans résoudre un système que F est un sous-espace vectoriel supplémentaire de E dans $\mathbb{R}^5$.

On applique la formule de la dimension. Sachant que $E \cap F = \{0_{\mathbb{R}^5}\}$, on a donc $\dim(E+F) = \dim E + \dim F$. Or $\dim F = 2$ car la famille (e_4, e_5) est génératrice de F et libre. Par la question précédente, on a que $\dim E = 3$. Donc $\dim(E+F) = 5$. Comme $E+F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^5$ avec la même dimension, on a d'après le cours que $E+F = \mathbb{R}^5$. Avec la question 1, cela montre que F est un sous-espace vectoriel supplémentaire de E .

Exercice 3. On note $\mathbb{R}_2[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 2. Soient $P_{-1}(X) = \frac{1}{2}(X-1)X$, $P_0(X) = (1-X)(1+X)$ et $P_1(X) = \frac{1}{2}X(1+X)$.

1. Montrer que $\mathcal{B} = (P_{-1}, P_0, P_1)$ est une famille libre de $\mathbb{R}_2[X]$.
Soient $\lambda_{-1}, \lambda_0, \lambda_1$ trois réels tels que $\lambda_{-1}P_{-1}(X) + \lambda_0P_0(X) + \lambda_1P_1(X) = 0$. On voit que pour $i, j \in \{-1, 0, 1\}$, $P_i(j) = 1$ si $i = j$ et 0 si $i \neq j$. Donc en faisant successivement $X = -1$, puis $X = 0$, puis $X = 1$, on trouve $\lambda_{-1} = 0$, puis $\lambda_0 = 0$, puis $\lambda_1 = 0$.

2. En déduire sans calculs que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Comme $\dim \mathbb{R}_2[X] = 3$ et que la famille $\mathcal{B}$ est libre et a 3 éléments, elle est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ (cours).

3. Donner l'expression dans la base $\mathcal{B}$ du polynôme X .

On écrit $X = \lambda_{-1}P_{-1}(X) + \lambda_0P_0(X) + \lambda_1P_1(X)$. On utilise les relations de la question 1. Pour $X = -1$, on trouve $-1 = \lambda_{-1}$. Pour $X = 0$, on trouve $\lambda_0 = 0$ et pour $X = 1$, $\lambda_1 = 1$. On a donc $X = -P_{-1}(X) + P_1(X)$. (On peut vérifier (mais ce n'est pas nécessaire de le faire) qu'en développant $-P_{-1}(X) + P_1(X)$, on trouve bien X .)

4. Plus généralement, déterminer les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ d'un polynôme quelconque $P \in \mathbb{R}_2[X]$ en fonction des valeurs de P en $-1, 0$ et 1 .

On écrit $P(X) = \lambda_{-1}P_{-1}(X) + \lambda_0P_0(X) + \lambda_1P_1(X)$. Si on fait $X = i$ pour $i \in \{-1, 0, 1\}$, on voit que $P(i) = \lambda_i$. Les coordonnées de P dans la base $\mathcal{B}$ sont donc $\begin{pmatrix} P(-1) \\ P(0) \\ P(1) \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$.

Exercice 4. Soit $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels. On définit l'application $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par

$$f(M) = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad \text{si} \quad M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que l'application f est une application linéaire.

Si M, M' sont deux matrices et $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$, on a

$$\lambda M + \lambda' M' = \begin{pmatrix} \lambda a + \lambda' a' & \lambda b + \lambda' b' \\ \lambda c + \lambda' c' & \lambda d + \lambda' d' \end{pmatrix}.$$

Donc

$$\begin{aligned} f(\lambda M + \lambda' M') &= \begin{pmatrix} \lambda d + \lambda' d' & -(\lambda b + \lambda' b') \\ -(\lambda c + \lambda' c') & \lambda a + \lambda' a' \end{pmatrix} \\ &= \lambda \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} + \lambda' \begin{pmatrix} d' & -b' \\ -c' & a' \end{pmatrix} = \lambda f(M) + \lambda' f(M'). \end{aligned}$$

2. Calculer $f \circ f$ et montrer que $f \circ f = Id$, l'application identique sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

$$(f \circ f)(M) = f(f(M)) = f\left(\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

3. Donner l'expression de la matrice $f(M) + M$ pour tout $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Déterminer $\text{Im}(f + Id)$ et en déduire que sa dimension est 1.

On a

$$f(M) + M = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d+a & 0 \\ 0 & d+a \end{pmatrix}.$$

Comme $\text{Im}(f + Id) = \{f(M) + M; M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\}$, on a que $\text{Im}(f + Id)$ est constitué des matrices qui sont multiples de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On sait que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ (cours), et sa dimension est donc 1.

4. Déterminer $\ker(f + Id)$ et montrer que sa dimension est 3. Pourrait-on savoir avant le calcul que $\dim \ker(f + Id) = 3$? Pourquoi?

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Alors $M \in \ker(f + Id)$ ssi $\begin{pmatrix} d+a & 0 \\ 0 & d+a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ssi $d+a = 0$ ssi $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$. Il y a 3 paramètres, donc $\ker(f + Id)$ est de dimension 3.

Oui. Le théorème du rang affirme que $\dim \ker(f + Id) = \dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) - \dim \text{Im}(f + Id)$. Or $\dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = 2 \times 2 = 4$ (cours). Donc $\dim \ker(f + Id) = 4 - 1 = 3$.

Exercice 5. Soit $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (z - y, x - z, y - x)$. Soient $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 0, 1)$ les trois vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Vérifier que f est une application linéaire. Donner la matrice A de f dans la base canonique. Pour la linéarité, on écrit

$$\begin{aligned} f(\lambda(x, y, z) + \lambda'(x', y', z')) &= f(\lambda x + \lambda' x', \lambda y + \lambda' y', \lambda z + \lambda' z') \\ &= (\lambda z + \lambda' z' - \lambda y - \lambda' y', \lambda x + \lambda' x' - \lambda z - \lambda' z', \lambda y + \lambda' y' - \lambda x - \lambda' x') \\ &= \lambda(z - y, x - z, y - x) + \lambda'(z' - y', x' - z', y' - x') \\ &= \lambda f(x, y, z) + \lambda' f(x', y', z'). \end{aligned}$$

On calcule $f(e_1) = (0, 1, -1)$, $f(e_2) = (-1, 0, 1)$ et $f(e_3) = (1, -1, 0)$ qu'on range en colonne pour donner $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Donner une base de $\ker f$ et sa dimension.

On a $(x, y, z) \in \ker f$ ssi $f(x, y, z) = (0, 0, 0)$ ssi $x = y = z$ ssi $(x, y, z) = x(1, 1, 1)$. On a 1 inconnue secondaire donc $((1, 1, 1))$ est une base de $\ker f$.

3. Extraire une famille libre de $(e_2 - e_3, e_3 - e_1, e_1 - e_2)$. En déduire une base de $\text{Im } f$.

On a $e_1 - e_2 = -(e_2 - e_3) - (e_3 - e_1)$, donc on ne garde que les deux premiers vecteurs. Ils ne sont pas colinéaires donc ils forment une famille libre.

On remarque que $e_2 - e_3 = f(e_1)$, $e_3 - e_1 = f(e_2)$, $e_1 - e_2 = f(e_3)$. Donc les trois vecteurs engendrent $\text{Im } f$. On déduit que $(e_2 - e_3, e_3 - e_1)$ est une base de $\text{Im } f$. Sa dimension est 2.

4. Calculer A^2 . Donner l'expression de $f^2(x, y, z)$.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

A^2 est la matrice de $f \circ f = f^2$ dans la base canonique donc

$$f^2(x, y, z) = (-2x + y + z, x - 2y + z, x + y - 2z).$$