Théorèmes d'existence et de comparaisons de limites

1.1 Savoir-faire calculatoires

Exercice 1 ().

Savoir-Faire

- Étudier la monotonie d'une suite en étudiant la différence de deux termes successifs.

Étudier la monotonie des suites dont le terme général est donné ci-dessous :

1. $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ pour $n \geq 1$
2. $b_n = -n + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ pour $n \geq 1$
3. $c_{n+1} = c_n(1 - c_n)$ pour $n \geq 0$
4. $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n(n+1)}$ pour $n \geq 1$

Exercice 2 ().

Savoir-Faire

- Établir une majoration et/ou une minoration d'une suite récurrente en étudiant la fonction associée
- Étudier la monotonie d'une suite récurrente

1. Soit (u_n) une suite vérifiant que $u_0 > 0$ et

$$u_{n+1} = 2 + \ln(u_n)$$

   (a) Déterminer la fonction f telle que $u_{n+1} = f(u_n)$.

   (b) En étudiant f, démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

   (c) Si $u_0 = 1$, démontrer que (u_n) est croissante.

   (d) Si $u_0 = 5$, démontrer que (u_n) est décroissante.

2. Soit (x_n) une suite définie par $x_0 \in [0, 1]$ et pour tout $n \geq 0$

$$x_{n+1} = \frac{1}{2 - x_n}$$

   (a) Déterminer la fonction f telle que $x_{n+1} = f(x_n)$.

   (b) En étudiant f, démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in [0, 1]$.

   (c) Étudier la monotonie de (x_n).

3. Soit (y_n) définie par $y_0 = \frac{1}{4}$ et pour tout $n \geq 1$

$$y_{n+1} = y_n(1 - y_n)$$

   (a) En identifiant la fonction g telle que $y_{n+1} = g(y_n)$ et en étudiant cette fonction sur $[0, 1]$, démontrer que pour tout n on a $0 \leq y_n \leq 1$.

   (b) Étudier la monotonie de (y_n).

Exercice 3 ().

Savoir-Faire

- Déterminer les limites potentielles d'une suite définie par récurrence

1. Déterminer les limites potentielles des suites (x_n) et (y_n) de l'exercice précédent.
2. Déterminer les limites potentielles d'une suite (u_n) telle que $u_{n+1} = u_n^2$
3. Déterminer les limites potentielles d'une suite (z_n) telle que$z_{n+1} = \dfrac{1}{z_n}$

Exercice 4 ().

Savoir-Faire

- Établir des inégalités ou des encadrements par des méthodes directes (encadrement classique, somme,...)

Déterminer des encadrements pour les suites suivantes :

1. $u_n = \cos(n)$ pour tout $n \geq 0$
2. $v_n = \dfrac{\cos(n)}{n}$ pour tout $n \geq 1$
3. $w_n = e^{(-1)^n}$
4. $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$
5. $a_n = \dfrac{\sin n \ln n}{n}$
6. $b_n = \dfrac{e^{\sin n}}{\sqrt{n}}$
7. $x_n = \displaystyle\sum_{i=2}^{n} \frac{1}{\ln(i)}$
8. $y_n = \dfrac{n + \sin\left(n\sqrt{2}\right)}{\sqrt{n}}$

1.2 Exercices

Exercice 5 ().
Démontrer par récurrence la Proposition 1 du cours.

Exercice 6 ().
On considère la suite définie pour tout entier $n \geq 1$ par le terme général

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

1. Démontrer que pour tout $k \geq 2$,
$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$
2. En déduire que (S_n) est convergente.

Exercice 7 ().
On considère une suite $x = (x_n)$ telle que $x_0 > 0$ et pour tout entier $n \geq 0$, $0 < x_{n+1} \leq 2 - \dfrac{1}{x_n}$

1. Démontrer que la suite x est décroissante *(indication : un raisonnement par récurrence n'est pas nécessaire)*
2. En déduire que cette suite converge (on note ℓ sa limite dans la question suivante).
3. Démontrer que $\ell \geq 0$ et que $(\ell - 1)^2 \leq 0$.
4. En déduire la valeur de ℓ.

Exercice 8 (). Soit u la suite définie par récurrence par :

$$u_0 = 1 \text{ et, pour tout entier naturel } n : \; : u_{n+1} = \frac{u_n}{4 - u_n}.$$

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n :

$$0 \leq u_n \leq 1$$

2. Étudier la monotonie de (u_n)
3. Montrer que (u_n) converge et déterminez sa limite
4. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a :

$$0 \leq u_{n+1} \leq \frac{u_n}{3}.$$

5. Démontrer que pour tout entier naturel n,

$$0 \leq u_n \leq \frac{1}{3^n}.$$

6. Retrouvez à partir de l'encadrement établie à la question précédente la valeur de la limite de (u_n).

Exercice 9 ().
Démontrer la proposition suivante du cours :
Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq C$$

Exercice 10 ().
Démontrer dans chacun des cas que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite.

1. On ose pour tout $n \geq 1$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$. Démontrer que

$$S_n \to +\infty$$

2. Démontrer que les suites $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n}$ convergent vers la même limite.
3. Démontrer que les suites $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n}$ et $v_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$ convergent vers la même limite.

Exercice 11 (Démonstration du théorème des suites adjacentes).
Dans cet exercice, on démontre le théorème des suites adjacentes. On ne peut donc pas l'utiliser pour répondre aux questions !

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. On suppose que (u_n) est croissante, que (v_n) est décroissante et que $\lim(u_n - v_n) = 0$.

1. Démontrer que si $k \leq n$,

$$u_k - v_k \leq u_n - v_n$$

2. En déduire que pour tout entier $k \in \mathbb{N}$,

$$u_k - v_k \leq 0$$

3. Démontrer alors que (u_n) est majorée et que (v_n) est minorée.
4. Démontrer alors que (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite.

Exercice 12 ().
En revenant à la définition de la limite, démontrer :

1. la proposition 3 (on pourra raisonner par l'absurde)
2. le premier point du théorème de comparaison (Proposition 4)

3. le deuxième point du théorème de comparaison (Proposition 4, théorème des gendarmes)

Exercice 13 (). *Critère Spéciale des séries alternées*

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de limite nulle. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k u_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Montrer que les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
   (b) En déduire que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. *(Ce résultat est appelé "critère spécial des séries alternées")*
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :
$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)$$
   (a) Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.
   Leur limite commune est appelée la *constante d'Euler.*
   (b) On pose pour tout entier $n \geq 1$:
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$
   Déterminer la limite de (S_n), notamment en exprimant S_{2n} en fonction de u_{2n} et u_n et en utilisant les résultats précédents.

Exercice 14 (). *Inspiré d'un exercice d'annale 2019*

Partie I : suites arithmétiques et géométriques

Soit $p \in \mathbb{R}$ et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant pour tout entier $n \geq 0$:
$$u_{n+1} = u_n + p$$
(une telle suite est dite *arithmétique*).
Soit $k \in \mathbb{R}$ et soit $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant pour tout entier $n \geq 0$:
$$g_{n+1} = kg_n$$
(une telle suite est dire *géométrique*)

1. En distinguant deux cas suivant le signe de p, démontrer que (u_n) est monotone.
2. Démontrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$
$$u_n = u_0 + pn$$
3. À l'aide du calcul des premiers termes, démontrer que si $k < 0$, (g_n) n'est pas monotone.
4. En distinguant deux cas suivant le signe de g_0, démontrer que si $k > 0$ alors (g_n) est monotone.
5. Démontrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,
$$g_n = g_0\, k^n$$

Partie II : étude d'un ensemble de suites

On note $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ l'ensemble des suites. Dans la suite de l'exercice, a représente un nombre réel, et on définit l'ensemble suivant :
$$E_a = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \mid \text{ il existe } b \in \mathbb{R} \text{ tel que pour tout } n \geq 0, u_{n+1} = au_n + b\}$$
On donne les définitions suivantes :

Définition 1: Combinaison linéaire de deux suites

On rappelle que si $\lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}$ et si $u = (u_n)$ et $v = (v_n)$ sont deux suites, alors on définit la suite $\lambda u + \mu v$ par

$$\text{Pour tout entier naturel } n, (\lambda u + \mu v)_n = \lambda u_n + \mu v_n$$

Définition 2: Stabilité par combinaison linéaire

On dit qu'un ensemble E est *stable par combinaison linéaire* si :

$$\text{Pour tous } \lambda \in \mathbb{R} \text{ et tous } \mu \in \mathbb{R}, \text{ si } u \in E \text{ et } v \in E \text{ alors } \lambda u + \mu v \in E$$

Définition 3: Espace engendré par deux suites

Soient u et v deux suites. On définit l'ensemble $\mathrm{Vect}(u, v)$ comme l'ensemble des combinaisons linéaires de u et v, autrement dit :

$$\mathrm{Vect}(u, v) = \{\lambda u + \mu v \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \mid \lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}\}$$

1. Montrer que E_a est stable par combinaison linéaire.
2. On définit les suites x et y par :

$$\text{pour tout entier naturel } n,\ x_n = 1 \quad \text{et} \quad y_n = a^n$$

   Montrer que $x \in E_a$ et $y \in E_a$.
3. Soit $u \in E_a$. Montrer qu'il existe un unique couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\begin{cases} \lambda x_0 + \mu y_0 = u_0 \\ \lambda x_1 + \mu y_1 = u_1 \end{cases}$$

4. Montrer que pour le couple (λ, μ) trouvé à la question précédente, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n = \lambda x_n + \mu y_n$.
5. Déduire des questions précédentes que $E_a = \mathrm{Vect}(x, y)$.