Théorèmes d'existence et de comparaison de limites

Dans cette partie, on va regarder quels arguments on peut donner lorsqu'on veut étudier une limite (existence ou non, en trouver la valeur,...) dans le cas où le calcul ne peut pas se faire directement à partir des opérations usuelles sur les limites et les équivalents.

1.1 Rappel sur les définitions des suites

Définition 1:

Une **suite réelle** est une succession infinie de nombres réels, dans un certain ordre.

Les réels qui la composent sont appelés les **termes** de cette suite.

Exemple 1:

- Suite des entiers naturels pairs : $0, 2, 4, 6, 8, 10, \cdots$.
- Suite des décimales de π : $3, 1, 4, 1, 5, 9, 2, 6, 5, 3, \ldots$.
- Suite des inverses des nombres entiers naturels non nuls :

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$$

Comme tout objet mathématique, une suite est désignée par une lettre, par exemple u. Les termes de la suite u sont alors notés ainsi :

$$u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$$

Il est habituel de noter u_0 le premier terme. Pour chaque entier n, le terme u_n est appelé **le terme de rang** n.

Remarque 1:

- Autre notation : *une suite u peut aussi se noter $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou, plus simplement, (u_n). Noter les parenthèses autour de u_n, qui signifient que l'on parle de la suite u tout entière et non du seul terme de rang n.*
- *Vocabulaire :* Si la lettre n représente un entier naturel quelconque, le terme de rang n, u_n, s'appelle le **terme général** de la suite u.

Définir une suite, c'est dire ce que vaut chacun de ses termes. Par exemple :

- Pour tout entier naturel n, u_n est le n-ième entier naturel pair.
- Pour tout entier naturel n, u_n est la n-ième décimale du nombre π.

Remarque 2: Une suite est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$

Comme on vient de la voir, la suite u associe à chaque entier naturel n un nombre réel u_n. C'est donc une fonction, dont l'ensemble de départ est $\mathbb{N}$ et l'ensemble d'arrivée $\mathbb{R}$. On note : $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Écrire quelques premiers termes d'une suite suivis de pointillés (par exemple $1, 2, 4, 8, \ldots$) ne suffit pas pour en connaître tous ses termes avec certitude. C'est pourquoi on ne peut pas parler de "la suite" $1, 2, 4, 8, \ldots$.

Dans certains cas, la valeur du terme général u_n peut être donnée de manière explicite :

Définition 2: Suite définie explicitement

Une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie **explicitement** si l'expression de chacun de ces termes est connue en fonction de n. Autrement dit, si l'on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = f(n) \text{ avec } f \text{ une fonction connue}$$

Exemple 2:

La suite des entiers naturels pairs peut s'exprimer explicitement : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2n$.

On a bien : $u_0 = 2 \times 0 = 0$, $u_1 = 2 \times 1 = 1$, $u_2 = 2 \times 2 = 4$,...

Vous pouvez visualiser les termes d'une suite définie explicitement via ce lien : https://www.geogebra.org/m/F6ZzYbxt

Dans certains cas, la valeur de u_{n+1} peut être calculée à partir de celle de u_n, ceci pour chaque entier naturel n. Si on connaît le premier terme de la suite, on peut alors calculer chacun des termes de proche en proche. C'est ce qu'on appelle une suite définie par récurrence :

Définition 3: Suite définie par récurrence

Une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie **par récurrence** d'ordre 1 si son premier terme u_0 est connu et si l'expression de chacun de ces termes est calculable grâce au précédent. Autrement dit, si l'on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_0 \text{ connu} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = f(n, u_n) \text{ avec } f \text{ une fonction connue}$$

Un cas particulier des suites récurrentes d'ordre 1 est le cas où la donnée de u_{n+1} ne dépend **que** du terme précédent, et pas de n. C'est-à-dire que la relation est de la forme

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

C'est un cas que l'on étudie souvent car l'étude de la fonction f permettra d'avoir des informations sur le comportement de la suite (u_n).

Exemple 3:

La suite u ci-après est définie par récurrence : $u_0 = -3$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + 4$.

Ses quatre premiers termes sont : $u_0 = -3$, $u_1 = -3 + 4 = 1$, $u_2 = 1 + 4 = 5$, $u_3 = 5 + 4 = 9$.

Vous pouvez visualiser les termes d'une suite définie par récurrence via ce lien : https://www.geogebra.org/m/bnny6k58

Remarque 3:

Certaines suites ne peuvent se définir **ni explicitement, ni par récurrence** ! C'est le cas par exemple de la suite des décimales de π.

1.2 Limites des suites monotones

Définition 4: Suite croissante

Une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite croissante si :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geq u_n.$$

Définition 5: Suite décroissante

Une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite décroissante si :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leq u_n.$$

Remarque 4:

Si les inégalités sont strictes, la suite est alors dite **strictement** croissante (ou strictement décroissante).

Exemple 4:

- La suite définie explicitement par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n$ est croissante.
  En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $u_{n+1} = n + 1 \geq n = u_n$.
- La suite définie par récurrence par $u_0 = -1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - n^2$ est décroissante.
  En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, n^2 est positif donc $u_n - n^2 \leq u_n$ et donc $u_{n+1} \leq u_n$.

Définition 6: Suite motonone

Une suite qui est croissante ou décroissante est dite **monotone**.

Remarque 5: Monotonie à partir d'un certain rang

Lorsqu'on ne peut montrer la croissance ou la décroissance d'une suite qu'à partir d'un certain rang N, par exemple pour la croissance :

$$\forall n \geq N, u_{n+1} \geq u_n$$

on dit alors que la suite est croissante (ou décroissante) **à partir d'un certain rang**.

Lorsque la suite est définie explicitement, il est souvent pratique de se ramener à l'étude de la croissance ou décroissance de la fonction, afin de conclure ensuite pour la suite.

Bonne pratique : cas explicite, étude de la fonction associée

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie explicitement et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction associée.

- Si f est croissante sur $\mathbb{R}_+$, alors u est croissante
- Si f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$, alors u est décroissante

Il suffit donc dans ce cas d'étudier la fonction associée, par exemple en la dérivant, pour déterminer si elle est croissante ou décroissante.

Exemple 5:

- La suite définie par $u_n = n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est croissante.
  En effet, la fonction définie par $f(x) = x^2$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.
- La suite définie par $u_n = n^2 - 6n + 8$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est croissante à partir du rang 3.
  En effet, la fonction définie par $f(x) = x^2 - 6x + 8$ a pour dérivée $f'(x) = 2x - 6$. Or $f'(x) \geq 0$ pour $x \geq 3$, donc f est croissante sur $[3, +\infty[$ et donc (u_n) est croissante à partir du rang 3.

Cette méthode ne fonctionne en particulier pas lorsqu'on veut étudier la monotonie d'une suite définie par récurrence. Il faut donc une méthode plus générale. Celle ci-dessous permet toujours de s'en sortir et vient directement de la définition !

Bonne pratique : Étude de la différence de deux termes successifs

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite.

- Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \geq 0$, alors u est croissante.
- Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \leq 0$, alors u est décroissante.

Exemple 6:

- La suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + n$ est croissante.
  En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = n \geq 0$.
- La suite définie par l'expression $u_n = \dfrac{3^n}{n}$ pour tout $n \geq 1$ est croissante.
  En effet, pour tout $n \geq 1$:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3^{n+1}}{n+1} - \frac{3^n}{n} = \frac{n3^{n+1} - (n+1)3^n}{n(n+1)} = \frac{3^n(3n - (n+1))}{n(n+1)} = 3^n \frac{2n-1}{n(n+1)}$$

  Or $3^n > 0$, $n(n+1) > 0$ et $2n - 1 > 0$ puisque $n \geq 1$. Le résultat est donc positif.

Remarque 6: Étude du quotient de deux termes consécutifs

Dans certains cas très spécifiques (donc rarement en fait), l'étude du quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ peut s'avérer judicieuse pour étudier la monotonie d'une suite.

En effet, si pour tout entier n, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ (ou bien si pour tout entier n, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$), on peut se ramener à $u_{n+1} \leq u_n$ ou bien $u_{n+1} \geq u_n$ en multipliant les deux membres de l'inégalité par u_n.

Attention donc à :

- s'assurer que u_n ne s'annule pas (sinon on ne peut pas faire le quotient)
- étudier avec précaution le signe de u_n, puisque s'il est négatif le sens de l'inégalité sera changé.

Dans le cadre de certaines suites récurrentes d'ordre 1, il existe également un critère très pratique pour établir la monotonie. Il est indiqué dans le résultat suivant, qui sera démontré dans un exercice de TD.

Proposition 1:

Soit I un intervalle et $f : I \to I$ une fonction **croissante**. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite satisfaisant la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier $n \geq 0$.

Alors $u_{n+1} - u_n$ est du même signe que $u_1 - u_0$.

Et il en découle donc une troisième méthode intéressante en pratique :

Bonne pratique : Monotonie d'une suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$

Lorsque $f : I \to I$ est croissante, toute suite (u_n) satisfaisant la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier $n \geq 0$ est :

- croissante si $u_1 \geq u_0$
- décroissante si $u_1 \leq u_0$

Remarque 7:

- Il n'y a pas de conclusion similaire si la fonction f est décroissante ! !
- Le fait que la fonction f ait le même intervalle d'arrivée que de départ est rarement immédiat et peut être l'objet d'une question en soit (que l'on résout en général par un tableau de variation)

Exemple 7:

Soit f la fonction de $[1, 3]$ dans $[1, 3]$ définie par :

$$f(x) = \frac{3}{4-x}.$$

Soit u la suite définie par récurrence par :

$$u_0 = 2 \text{ et, pour tout entier naturel } n : \; : u_{n+1} = f(u_n).$$

La fonction f est croissante puisque pour tout $x \neq 4$, $f'(x) = \dfrac{3}{(4-x)^2} \geq 0$.

Donc la monotonie de u est donnée par le signe de $u_1 - u_0 = 1 - 2 = -1$. Ainsi la suite est décroissante.

Les suites monotones ont un comportement bien particulier :

- Soit ses termes finissent par être plus grand (ou plus petit) que n'importe quel nombre : la suite tend alors vers $+\infty$ ou $-\infty$.
- Soit ses termes finissent par se rapprocher d'un nombre fini. La suite converge alors vers une limite finie ℓ.

Ce constat est formalisé dans le prochain théorème, qui nécessite d'introduire avant les définitions suivantes :

Définition 7: Suite majorée, minorée, bornée

Soient $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que u est :

- **majorée** si tous les termes de la suite sont plus petits ($\leq$) qu'une même constante M. M est alors un *majorant* de u :
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$$
- **minorée** si tous les termes de la suite sont plus grands ($\geq$) qu'une même constante m. m est alors un *minorant* de u.
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq m$$

- **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

Proposition 2:

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq C$$

Preuve :

Exercice de TD

Théorème 1: De la limite monotone

- Si $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite **croissante majorée** par une constante M (respectivement **décroissante minorée** par une constante m), alors **elle converge** et sa limite ℓ vérifie $\ell \leq M$ (resp. $\ell \geq m$).
- Si $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite **croissante non majorée** (resp. **décroissante non minorée**), alors elle tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Dans tous les cas, **une suite monotone a donc forcément une limite !**

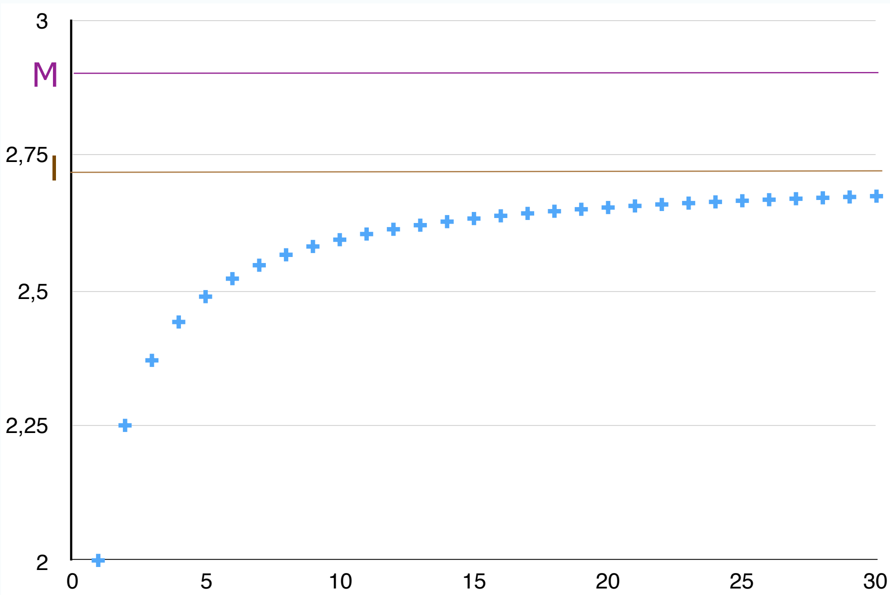

Figure 1 – Une suite croissante majorée par M

Exemple 8:

On considère la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier $n \geq 0$ par

$$u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$$

C'est-à-dire $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = \sqrt{2+x}$, pour tout $x \in [0, 2]$.

- f est croissante car $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{2+x}} \geq 0$, donc la monotonie de (u_n) est donnée par le signe de $u_1 - u_0$. Or $u_1 - u_0 = \sqrt{2} - 0 \geq 0$, **donc (u_n) est croissante**.
- Le tableau de variation de f sur $[0, 2]$ montre que ses valeurs sont comprises entre $f(0) = \sqrt{2}$ et $f(2) = 2$, et donc bien dans l'intervalle $[0, 2]$. Ce qui justifie ainsi que tous les termes de la suite sont aussi dans $[0, 2]$. **Donc (u_n) est majorée par** 2.

D'après le théorème de limite monotone, la suite (u_n) est donc convergente **(mais le théorème ne permet pas de calculer la limite !)**

Remarque 8: valeur de la limite ?

- Le théorème de la limite monotone ne donne pas d'information sur la valeur de la limite !
- La méthode de majoration de l'exemple précédent est généralisable à toutes les suites récurrentes de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$: en trouvant un intervalle de définition I tel que toutes les valeurs images de f sont aussi dans I, alors on en déduit que toutes les valeurs de la suite (u_n) sont dans l'intervalle I. Ce qui permet d'obtenir parfois une majoration ou une minoration.

1.3 Passage des égalités et inégalités à la limite

Dans cette section, on présente des résultats utilisables **lorsqu'on sait que les suites étudiées convergent**, mais qu'on n'a pas encore d'informations sur leurs limites.

Proposition 3: Passage des (in)égalités à la limite

Soient $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites ayant pour limites (finies) respectivement ℓ_u et ℓ_v. Alors :

- $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang $\Longrightarrow \ell_u \leq \ell_v$
- $u_n = v_n$ à partir d'un certain rang $\Longrightarrow \ell_u = \ell_v$

Un cas particulier de ce théorème est le résultat suivant : Si (u_n) converge et est majorée par M, alors $\lim u_n \leq M$.

Preuve :

Exercice de TD

Remarque 9: Inégalité stricte ?

Attention, le passage à la limite ne conserve pas les inégalités strictes. Autrement dit, si $u_n < v_n$ à partir d'un certain rang, alors $\ell_u \leq \ell_v$ et rien de mieux !

Une conséquence de ce théorème est utile lors de l'étude des suites récurrentes. En effet si (u_n) est une suite récurrente que l'on sait convergente (vers une limite notée ℓ), en passant la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ a la limite et en combinant avec le théorème de composition des limites, on obtient le résultat suivant :

Corollaire 1: Limite d'une suite récurrente

Soit (u_n) une suite récurrente dont la relation de récurrence est donnée par

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

avec une fonction f continue.

Si la suite (u_n) converge vers une limite ℓ, alors cette limite vérifie l'équation

$$\ell = f(\ell)$$

Bonne pratique : Étude d'une suite récurrente

Dans l'étude d'une suite récurrente donnée par $u_{n+1} = f(u_n)$, on retrouve souvent le schéma suivant :

1. on montre que la suite converge grâce au théorème de convergence monotone
2. on calcule la limite en passant à l'égalité dans la relation de récurrence puis en résolvant l'équation $\ell = f(\ell)$.

1.4 Obtention de limites par comparaisons

Dans cette section, on va s'intéresser à des résultats qui permettent d'établir l'existence d'une limite et de la calculer simultanément. Il s'agit donc de résultats fondamentalement différents des précédents, qui permettaient de faire soit l'un soit l'autre.

Pour comparer des suites entres elles, il s'agit d'établir des inégalités et/ou des encadrements.

Bonne pratique : Construire des inégalités par une méthode directe : quelques exemples

- Une exponentielle est toujours positive donc $(e^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0. Elle n'est pas majorée car $e^n \to +\infty$.
- $(1 + \frac{\cos(n)}{n})_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est majorée par 2 et minorée par 0. En effet :

$$\begin{aligned}
& -1 \leq \cos(n) \leq 1 \\
\text{donc}\quad & -\frac{1}{n} \leq \frac{\cos(n)}{n} \leq \frac{1}{n} && \text{(diviser par un nombre positif ne change pas le sens des inégalités)} \\
\text{donc}\quad & 1 - \frac{1}{n} \leq 1 + \frac{\cos(n)}{n} \leq 1 + \frac{1}{n} && \text{en ajoutant 1 à chaque membre} \\
\text{donc}\quad & 0 \leq 1 + \frac{\cos(n)}{n} \leq 2 && \text{car } n \geq 1 \text{ donc } \frac{1}{n} \leq 1
\end{aligned}$$

- Puisque $(-1)^n \leq 1$, on a :

$$1 + \frac{(-1)^n}{n} \leq 1 + \frac{1}{n}$$

Une autre méthode directe de construction d'inégalités concerne spécifiquement les sommes et nécessite de connaître :

- le plus petit terme de la somme
- le plus grand terme de la somme
- le nombre de termes présents dans la somme

La méthode décrite ci-dessous donne rarement un encadrement précis, mais il peut néanmoins se révéler utile !

Bonne pratique : Construire des inégalités pour une somme

Pour encadrer une somme, on dispose d'une méthode systématique. Posons

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Cette somme possède n termes. Dans cette somme, notons a_{min} le plus petit terme. Alors tous les autres sont plus grands que lui et donc

$$S_n \geq a_{\text{min}} + a_{\text{min}} + \cdots + a_{\text{min}} = n \times a_{\text{min}}$$

De même, en notant a_{max} le plus grand terme de la somme on a :

$$S_n \leq n \times a_{\text{max}}$$

Une somme est donc toujours encadrée par

- Son nombre de terme multiplié par son plus petit terme
- Son nombre de terme multiplié par son plus grand terme

Par exemple, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{n}{n^2+k^2} \geq \frac{1}{5}$$

Enfin, une dernière méthode régulièrement utilisée est la démonstration par récurrence, à condition que l'on nous donne dans l'énoncé l'inégalité à démontrer, ou bien d'en avoir l'intuition (ce qui n'est pas évident en général !)

Bonne pratique : Obtenir une inégalité par un raisonnement par récurrence

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq \dfrac{u_n}{3}$.

Démontrons par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \dfrac{u_0}{3^n}$.

- **Initialisation :** $\dfrac{u_0}{3^0} = \dfrac{u_0}{1} = u_0$ donc on a bien $u_0 \leq \dfrac{u_0}{3^0}$ (on a même l'égalité).
- **Hérédité :** Supposons que pour un entier $N \in \mathbb{N}$ fixé on a $u_N \leq \dfrac{u_0}{3^N}$.

  Démontrons que $u_{N+1} \leq \dfrac{u_0}{3^{N+1}}$. Or,

  $$\begin{aligned} u_{N+1} &\leq \frac{u_N}{3} && \text{d'après l'inégalité de l'énoncé} \\ &\leq \frac{1}{3}\frac{u_0}{3^N} && \text{par hypothèse de récurrence et car } \frac{1}{3} > 0 \\ &\leq \frac{1}{3^{N+1}}u_0 \end{aligned}$$

  Ainsi on a bien l'hérédité.

Par principe de récurrence, on a donc pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \dfrac{u_0}{3^n}$.

Le théorème suivant contient le "théorème des gendarmes" vu (ou pas suivant vos spécialités) au lycée. Il contient en fait plusieurs résultats qui permettent de :

- Établir l'existence d'une limite
- Calculer cette limite

Il faut souligner que c'est le seul théorème qui nous permet de faire les deux d'un coup puisque :

- le théorème de convergence monotone nous donnait l'existence d'une limite sans en donner la valeur
- les passages des égalités ou inégalités à la limite ne s'utilisent que sur des suites dont on sait déjà qu'elles ont une limite

Proposition 4: Théorèmes de comparaison

- Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles qu'à partir d'un certain rang, $u_n \geq v_n$ (resp. $u_n \leq v_n$). Si $v_n \to +\infty$ (resp. $v_n \to -\infty$) alors $u_n \to +\infty$ (resp. $u_n \to -\infty$).
- Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites telle que $x_n \to \ell$, $y_n \to \ell$ et à partir d'un certain rang $x_n \leq u_n \leq y_n$. Alors $u_n \to \ell$.

Ces deux théorèmes ne supposent pas l'existence de limites. Ils permettent donc d'établir à la fois l'existence et la valeur de la limite.

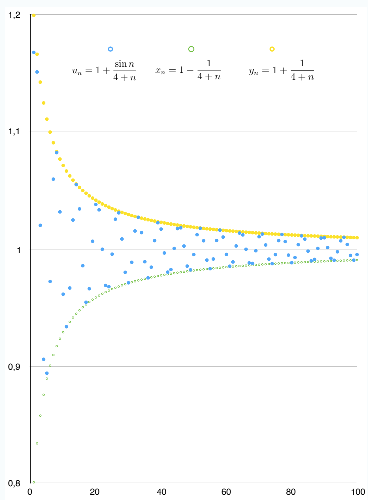

FIGURE 2 – Illustration du théorème des gendarmes

Preuve :

Exercice de TD

Exemple 9:

On considère la suite définie par le terme général suivant :

$$x_n = n^2 + (-1)^n$$

Évidemment on a envie de dire "bah c'est n^2 qui l'emporte". Ok sauf qu'en fait on n'a aucune justification pour cela autre que l'intuition. Typiquement on aurait envie de faire un équivalent, mais rien ne permet de justifier immédiatement (en tout cas avec ce qu'on a vu jusqu'ici) que $x_n \sim n^2$.

Le théorème de comparaison est alors très utile dans ce genre de cas (et d'autres cas bien plus compliqués aussi hein). En effet, puisque $(-1)^n \geq -1$ on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$x_n \geq n^2 - 1$$

Or $n^2 - 1 \sim n^2 \to +\infty$, donc par théorème de comparaison, $x_n \to +\infty$ aussi !

Bonne pratique :

Le théorème des gendarmes (deuxième point du théorème précédent) s'utilise régulièrement sous la forme suivante (notamment avec $\ell = 0$:
on suppose que

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ |u_n - \ell| \leq v_n \quad \text{ et que } v_n \to 0$$

Alors

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell$$

Exemple 10:

On considère la suite définie par le terme général $u_n = \dfrac{\sin(n)}{n}$. On a :

$$|u_n| = \frac{|\sin(n)|}{n} \leq \frac{1}{n}$$

Or $\dfrac{1}{n} \to 0$ donc d'après le théorème de comparaison (théorème des gendarmes), $u_n \to 0$.

1.5 Suites adjacentes

Définition 8: Suites adjacentes

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles.

On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont *adjacentes* si

- l'une de ces suites est croissante
- l'autre est décroissante

- $\lim(u_n - v_n) = 0$

Bien noter que la définition ne suppose pas que les suites convergent a priori. Le théorème des suites adjacentes est justement un résultat d'existence de limite.

Théorème 2: des suites adjacentes

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles.

Si elles sont adjacentes, alors elles convergent vers la même limite ℓ.

Précisément, si c'est $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est croissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est décroissante, alors pour tous $m, n \in \mathbb{N}$: $u_m \leq \ell \leq v_n$.

Preuve :

Exercice de TD

Exemple 11:

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}, \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n \times n!}$$

Ces deux suites sont adjacentes car :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} \geq 0$$

  donc (u_n) est croissante
- pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} + \frac{1}{(n+1) \times (n+1)!} - u_n - \frac{1}{n \times n!} \\ &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1) \times (n+1)!} - \frac{1}{n \times n!} \\ &= \frac{n(n+1) + n - (n+1)^2}{n(n+1) \times (n+1)!} \\ &= \frac{-1}{n(n+1) \times (n+1)!} \\ &< 0 \end{aligned}$$

  donc (v_n) est décroissante
- on a

$$v_n - u_n = \frac{1}{n \times n!} \to 0$$

Ces deux suites convergent donc vers la même limite (mais on ne connaît pas sa valeur !)