

Sujet M31C3 :

Dans une classe de CM1, un enseignant conçoit une séquence, de 5 séances, qui se déroulera sur les périodes 1 et 2, et vise la compétence « Reconnaître et résoudre des problèmes relevant de la proportionnalité en utilisant une procédure adaptée ».

Séquence :

La séance 1 aura pour objectif d'introduire la compétence « Reconnaître et traiter une situation de proportionnalité en utilisant les propriétés de linéarité additive ».

La séance 2 aura pour objectif d'introduire la compétence « Reconnaître et traiter une situation de proportionnalité en utilisant les propriétés de linéarité multiplicative ».

La séance 3 sera une séance d'institutionnalisation et de systématisation des procédures découvertes au cours de la séance 1.

La séance 4 sera une séance d'entraînement à l'utilisation de ces deux propriétés de linéarité.

La séance 5 sera une séance d'évaluation.

Vous concevrez la séance 1 et son animation.

Document 1 : Module 15 « La proportionnalité », *Tandem CM1-CM2*, Nathan, 2021.

module 15 La proportionnalité

Les MATHS en vie

1 Le gâteau chat

Deux apprentis cuisiniers doivent préparer un gâteau pour un goûter d'anniversaire. Voici la recette qu'ils ont choisie.



RECETTE

GÂTEAU CHAT
3 coups de griffes pour transformer votre gâteau en chat !

Pour le gâteau	Pour la décoration
6 œufs	1 tablette de chocolat au lait
120 g sucre	2 tranches de pain de mie
180 g farine	Quelques carrés de chocolat noir
60 g cacao	Des Smarties®



CM1

Comment puis-je faire pour préparer ce gâteau pour dix personnes ?



CM2

J'ai trouvé une autre recette pour deux personnes : 2 œufs, 50 g de sucre, 50 g de farine et 25 g de cacao. Quelle recette est la plus sucrée ?

PAS à PAS

CM1

1. Trouve d'abord la quantité d'ingrédients nécessaire pour deux personnes, puis pour dix personnes.
2. La recette indique que le gâteau doit cuire 35 minutes. À ton avis, ce temps augmente-t-il aussi ? Quel est le temps de cuisson pour dix personnes ?

CM2

1. Que va-t-on devoir comparer pour savoir quelle recette est la plus sucrée ?
2. Calcule maintenant la quantité d'ingrédients nécessaire de chaque recette pour dix personnes. Plusieurs méthodes sont-elles possibles ?

168

Problèmes relevant de la proportionnalité

Ce que sait faire l'élève

- Dans chacun des trois domaines « nombres et calculs », « grandeurs et mesures » et « espace et géométrie » des problèmes relevant de la proportionnalité sont proposés à l'élève.
- Il mobilise pour les traiter des formes de raisonnement spécifiques et des procédures adaptées, comme les propriétés de linéarité (additive et multiplicative).

Exemples de réussite

- Indique si les affirmations sont vraies ou fausses. Justifie ta réponse.
 - Si Max mesure 1 m 10 cm à 9 ans, il mesurera 2 m 20 cm à 18 ans.
 - Si je prends 5 litres d'essence, je paie 8€. Si je prends 15 litres, je paierai 24 €.
 - Si 4 billes identiques pèsent 20 g, que 8 billes pèsent 40 g alors 2 billes pèsent 10 g.
- Sachant qu'une bouteille coûte 2€, complète le tableau suivant :

Nombre de bouteilles achetées	2	4	6	8	10	12	15	20	30	50
Prix payé										

- ♦ Il résout des situations de type : « si j'ai deux fois, trois fois... plus d'invités, il me faudra deux fois, trois fois... plus d'ingrédients » ; « je dispose de briques de masses identiques. Si 10 briques pèsent 5 kg, combien pèsent 25 briques ? »

NOMBRES ET CALCULS (suite)		
La résolution de problèmes		
Dès le début du cycle, les problèmes proposés relèvent des quatre opérations. La progressivité sur la résolution de problèmes combine notamment : <ul style="list-style-type: none">- les nombres mis en jeu : entiers (tout au long du cycle) puis décimaux dès le CM1 sur des nombres très simples ;- le nombre d'étapes que l'élève doit mettre en œuvre pour leur résolution ;- les supports proposés pour la prise d'informations : texte, tableau, représentations graphiques. La communication de la démarche prend différentes formes : langage naturel, schémas, opérations.		
<i>Problèmes relevant de la proportionnalité</i>		
Le recours aux propriétés de linéarité (multiplicative et additive) est privilégié. Ces propriétés doivent être explicitées ; elles peuvent être institutionnalisées de façon non formelle à l'aide d'exemples verbalisés (« Si j'ai deux fois, trois fois... plus d'invités, il me faudra deux fois, trois fois... plus d'ingrédients » ; « Je dispose de briques de masses identiques. Si je connais la masse de 7 briques et celle de 3 briques alors je peux connaître la masse de 10 briques en faisant la somme des deux masses »). Dès la période 1 , des situations de proportionnalité peuvent être proposées (recettes...). L'institutionnalisation des propriétés se fait progressivement à partir de la période 2 .	Dès la période 1 , le passage par l'unité vient enrichir la palette des procédures utilisées lorsque cela s'avère pertinent. À partir de la période 3 , le symbole % est introduit dans des cas simples, en lien avec les fractions d'une quantité (50 % pour la moitié ; 25 % pour le quart ; 75 % pour les trois quarts ; 10 % pour le dixième).	Tout au long de l' année , les procédures déjà étudiées en CM sont remobilisées et enrichies par l'utilisation explicite du coefficient de proportionnalité lorsque cela s'avère pertinent. Dès la période 2 , en relation avec le travail effectué en CM, les élèves appliquent un pourcentage simple (en relation avec les fractions simples de quantité : 10 %, 25 %, 50 %, 75 %). Dès la période 3 , ils apprennent à appliquer un pourcentage dans des registres variés.

Différents types de problèmes pour une progressivité dans les procédures de résolution

Les exemples ci-dessous n'ont pas la prétention d'être des situations de référence mais plutôt des exemples représentatifs des différentes approches possibles. Le travail du maître par le jeu sur les variables didactiques des situations, l'entraînement des élèves par la répétition de problèmes du même style (dans des cadres et des habillages variés) pourront créer les conditions favorables d'un apprentissage de la notion de proportionnalité (reconnaissance des situations et mise en œuvre de procédures de résolution).

Travail sur les procédures et le raisonnement dans le cas de situations de proportionnalité

Deux types de travaux peuvent être menés de front pour introduire la proportionnalité.

Un travail sur les propriétés additives et multiplicatives (linéarité) dès le début du cycle 3

Exemple : 3 bandes superposables de papier bleu mises bout à bout ont la même longueur que 2 bandes superposables de papier rouge mises bout à bout. Combien de bandes rouges vont être nécessaires pour réaliser la même longueur que 6 bandes bleues ? 15 bandes bleues ? 42 bandes bleues ? Combien de bandes bleues vont être nécessaires pour réaliser la même longueur que 12 bandes rouges ?

Cet exemple (tout comme l'exemple de l'empilement des cubes) présente plusieurs intérêts majeurs. Le rapport 3 pour 2 peut être modifié pour différencier le niveau de difficulté. Les questions peuvent également impliquer des changements de procédure (passer du champ additif pour les **petits nombres** au champ multiplicatif pour les **grands nombres**, étudier les bandes bleues en fonction des bandes rouges et vice-versa). Enfin cette situation propose une validation par le milieu matériel simple et efficace (l'élève doit anticiper les réponses et peut les vérifier par manipulation).

Un travail sur le retour à l'unité¹⁰ (proportion) dès le CM1

Exemple : Dans un magasin A, on vend des stylos, 4 pour 2 euros. Dans un magasin B, on vend les mêmes stylos 2,50 euros les 6. Dans quel magasin trouve-t-on les stylos les moins chers ?

Dans cet exemple, on privilégiera le retour aux prix unitaires des stylos. Le rapport entre prix et nombre de stylos peut être modifié pour différencier le niveau de difficulté. L'habillage concret de la situation devra être discutée avec les élèves pour lever les ambiguïtés (ce ne sont pas des lots de stylos, on peut acheter les stylos à l'unité, on n'a pas de remise si on en prend beaucoup, etc.)

On notera que l'exemple sur les bandes de papier peut se traiter par retour à l'unité (1 bande rouge vaut 1,5 bande bleue) et que l'exemple des stylos peut se traiter par linéarité (dans A, 12 (3 × 4) stylos coûtent 6 (3 × 2) euros alors que dans B, 12 stylos ne coûtent que 5 euros).

Ces situations permettent de mettre en relief les procédures des élèves (additions répétées, multiplication, division, retour à l'unité, etc.) et aussi de repérer les procédures erronées pour les mettre en débat afin de les dépasser :

Exemple : Si 3 bandes bleues valent 2 bandes rouges, alors 6 bandes bleues valent 5 bandes rouges (« on soustrait 1 »). Si 4 stylos valent 2 euros, alors 6 stylos valent 4 euros (« on ajoute 2 »). Cette erreur bien identifiée dans la littérature provient de la persistance du modèle additif (« pour 2 stylos de plus, je paye 2 euros de plus »).

Reconnaissance de situations de proportionnalité

Dans beaucoup de cas, la proportionnalité relève du contexte de l'énoncé (connaissance sociale). Il s'agit de lever les implicites par discussion avec les élèves et de comparer des situations de proportionnalité avec des situations de non-proportionnalité. Certaines situations sont classiques pour travailler la proportionnalité (et peuvent être abordées, pour certaines, dès le CP) :

Exemple : Le change de monnaie (euros/dollars...). Les conversions d'unités (centimètres/*inches*...). Les recettes de cuisine. Prix à payer en fonction du nombre de pains achetés. Prix à payer en fonction de la masse achetée...

Attention, les conversions d'unités du type kilogrammes/grammes sont des cas particuliers de situations de proportionnalité avec un coefficient 1 000 et apparaissent de ce fait comme des problèmes de numération, c'est-à-dire mettant en œuvre des connaissances relatives à la désignation des nombres.

D'autres situations peuvent sembler relever du modèle proportionnel mais n'en relèvent pas.

10. Attention, dans certains contextes, le retour à l'unité n'a pas de sens concret (ainsi, avec 2 baguettes je prépare les sandwiches de 5 élèves, donc avec 1 baguette je prépare les sandwiches de 2,5 élèves...).

Exemple : Taille et poids. Tarifs de taxi. Nombre de buts par matchs. Nombre d'enfants par famille...

Il s'agit de comprendre la distinction entre proportionnalité et croissance (toujours dans l'optique de dépasser l'obstacle de la persistance du modèle additif). Il est important de bien préparer l'argumentation pour prouver qu'une situation relève, ou non, du modèle proportionnel. La confrontation de l'élève à des situations de non-proportionnalité est primordiale pour la reconnaissance du modèle proportionnel. Cet aspect peut être abordé avec des élèves de CM2 qui ont déjà travaillé sur la proportionnalité.

Exemple : Prix à payer en fonction du nombre d'entrées au cinéma.

– si le billet est à tarif unique il y a proportionnalité (pour six personnes on paye deux fois plus que pour trois personnes (utilisation de la propriété multiplicative ou additive) ou six fois plus cher que pour une personne (retour à l'unité) ;
– si le billet n'est pas à tarif unique (un prix pour les adultes, un prix pour les enfants) alors il n'y a pas proportionnalité (six personnes ne paieront pas forcément deux fois plus cher que trois personnes). Il serait intéressant de comprendre qu'il y a proportionnalité dans chaque catégorie (les enfants et les adultes), car dans la vie courante la proportionnalité apparaît généralement sous cette forme.

Exemple : Reconnaître un agrandissement de polygone tracé sur papier quadrillé.

Il s'agit de comprendre qu'un agrandissement respecte les proportions (les rapports entre les mesures des côtés). Comme beaucoup de termes mathématiques, le mot agrandissement est ambigu. En effet dans le langage courant un agrandissement désigne généralement une augmentation sans conservation des rapports (« agrandir une maison » par exemple). Alors qu'en mathématiques le mot agrandissement désigne une transformation qui conserve les proportions (au sens des homothéties). Cette polysémie peut être la source d'incompréhensions et d'obstacles.

Introduction du tableau de proportionnalité

Le tableau de proportionnalité classique (en lignes ou en colonnes) est une schématisation qui condense l'information d'un énoncé ainsi que la question posée. La partie « organisation et gestion de données » du programme officiel de l'école élémentaire insiste sur « les capacités d'organisation et de gestion des données », et « apprendre à trier des données, à les classer, à lire ou à produire des tableaux ». Résumer un énoncé de problème de proportionnalité en un tableau nécessite un apprentissage et un entraînement. Les tableaux peuvent être introduits de manière relativement naturelle (lecture de tableau au CP/CE1 et réalisation de tableau dès le CE2).

Exemple : Jeux du banquier et change de monnaie. Les élèves collent les étiquettes qui se correspondent en euros et en dollars les unes en face des autres et font apparaître les opérateurs qui justifient les correspondances.

« Construire un tableau de proportionnalité » et « compléter un tableau de proportionnalité » donné sont des travaux à mener avec les élèves. Construire un tableau permet d'identifier les grandeurs en jeu dans un énoncé, les classer et gérer les données. Compléter un tableau permet de travailler spécifiquement les techniques de recherche de quatrième proportionnelle (connaissant trois termes d'une proportion, on demande de calculer le quatrième). Il est également important de confronter les

élèves avec des tableaux pré-remplis qui ne résument pas des situations de proportionnalité pour parer à l'amalgame « tableau, donc proportionnalité » (en CM2).

Exemple : Un cycliste se chronomètre sur différentes distances. Il obtient le tableau suivant :

Distance (en kilomètres)	15	30	60
Durée (en minutes)	45	90	210

La durée est-elle proportionnelle à la distance parcourue ?

Le travail sur les tableaux de proportionnalité peut être accompagné de construction d'une représentation graphique de la fonction linéaire sous-jacente. L'étude du graphique permet de trouver de nouvelles correspondances.