Contrôle continu 2 – algèbre linéaire

Exercice 1 (vrai/faux)**.** Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses, en justifiant par un contre-exemple lorsque l'assertion est fausse, et en donnant une démonstration ou en citant convenablement le cours sinon. Soit E un espace vectoriel. Les familles considérées sont des familles de E.

1. L'intersection de deux sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.
2. L'union de deux sous-espaces vectoriels est un espace vectoriel.
3. Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E alors $\dim F + \dim G = \dim(F+G)$.
4. La composée d'applications linéaires est linéaire.
5. Une application linéaire f est surjective si $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$.
6. Une application linéaire $f\colon \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est injective si $\operatorname{rg}(f) = 3$.
7. Une application linéaire $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ n'est jamais surjective.
8. Soit $h \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. L'application $\varphi\colon \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) : f \mapsto fh$ est linéaire.

Exercice 2. Dans $\mathbb{R}^5$, on prend le sous-espace vectoriel

$$E = \{u = (x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{R}^5 \colon x_1 + x_4 - x_5 = 0, x_1 - x_4 = 0,\ 2x_4 - x_5 = 0\}.$$

Soient e_i les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^5$: $e_1 = (1,0,0,0,0)$, $e_2 = (0,1,0,0,0)$, etc. Soit $F = \operatorname{Vect}(e_4, e_5)$.

1. Montrer que $E \cap F = \{0_{\mathbb{R}^5}\}$.
2. Déterminer une base de E. Quelle est sa dimension ?
3. Montrer sans résoudre un système que F est un sous-espace vectoriel supplémentaire de E dans $\mathbb{R}^5$.

Exercice 3. On note $\mathbb{R}_2[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 2. Soient $P_{-1}(X) = \frac{1}{2}(X-1)X$, $P_0(X) = (1-X)(1+X)$ et $P_1(x) = \frac{1}{2}X(1+X)$.

1. Montrer que $\mathscr{B} = (P_{-1}, P_0, P_1)$ est une famille libre de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. En déduire sans calculs que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Donner l'expression dans la base $\mathscr{B}$ du polynôme X.
4. Plus généralement, déterminer les coordonnées dans la base $\mathscr{B}$ d'un polynôme quelconque $P \in \mathbb{R}_2[X]$ en fonction des valeurs de P en $-1, 0$ et 1.

Exercice 4. Soit $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels. On définit l'application $f : \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ par

$$f(M) = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad \text{si} \quad M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que l'application f est une application linéaire.
2. Calculer $f \circ f$ et montrer que $f \circ f = Id$, l'application identique sur $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
3. Donner l'expression de la matrice $f(M) + M$ pour tout $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Déterminer $\operatorname{Im}(f + Id)$ et en déduire que sa dimension est 1.

4. Déterminer $\ker(f+Id)$ et montrer que sa dimension est 3. Pouvait-on savoir avant le calcul que $\dim\ker(f+Id)=3$? Pourquoi ?

Exercice 5. Soit $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z)=(z-y,x-z,y-x)$. Soient $e_1=(1,0,0)$, $e_2=(0,1,0)$ et $e_3=(0,0,1)$ les trois vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Vérifier que f est une application linéaire. Donner la matrice A de f dans la base canonique.
2. Donner une base de $\ker f$ et sa dimension.
3. Extraire une famille libre de $(e_2-e_3, e_3-e_1, e_1-e_2)$. En déduire une base de $\operatorname{Im} f$.
4. Calculer A^2. Donner l'expression de $f^2(x,y,z)$.