Étudier le comportement asymptotique d'une suite

1.1 Savoir-faire calculatoires

Exercice 1 ().

Savoir-Faire

- Calculer une limite par opérations algébriques (sommes et produits)

Déterminer la limite des suites dont les termes généraux sont les suivants :

a) $a_n = \dfrac{1}{n + e^n}$

b) $b_n = 3n^2 - 1 + \dfrac{1}{n}$

c) $c_n = \dfrac{2^n + \ln(n)}{(0,5)^n}$

d) $\dfrac{e^{-n}}{\sqrt{n}}$

e) $\dfrac{n}{e^{-n}}$

f) $\sqrt{n}\ln(n)$

Exercice 2 ().

Savoir-Faire

- Calculer un équivalent et/ou une limite à l'aide de l'échelle de négligeabilité

Déterminer un équivalent le plus simple possible des suites dont les termes généraux sont les suivants, puis calculer leurs limites :

a) $n^3 + e^{-n} - 2n^2$

b) ne^{-n}

c) $n\ln(n) + e^{2n} + e^n$

d) $(1+\frac{1}{n})^2+(1-e^{-n})^2+\cos\left(\frac{1}{n}\right)$

e) $\dfrac{n\ln(n)}{e^n}$

f) $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\sqrt{1+\frac{1}{n}}$

g) $e^{-n} + n^2$

h) $\dfrac{\sqrt{n}}{\ln(n)}$

i) $1 + \dfrac{1}{n} + e^{-n} + 2\ln(n)$

j) $\dfrac{e^{-n}}{\frac{1}{\sqrt{n}}}$

Exercice 3 ().

Savoir-Faire

- Appliquer les règles de calcul d'équivalents

Déterminer un équivalent le plus simple possible des suites dont les termes généraux sont les suivants :

a) $(n+1)^3 \ln(n)$

b) $\dfrac{n^3+1}{n^2+2}$

c) $\dfrac{2\ln(n) - e^{-2n} + 1}{4n^4 + 2n^2 + 3n^3 + 1}$

d) $n(\ln(n) - n)$

Exercice 4 ().

Savoir-Faire

- Déterminer une relation de négligeabilité ou d'équivalence entre deux suites données

Voici des suites :

i) $a_n = n+1$

ii) $b_n = \dfrac{1}{n}$

iii) $c_n = \dfrac{1}{n^2}$

iv) $d_n = e^n$

v) $e_n = e^{n+1}$

vi) $f_n = n$

vii) $g_n = e^{1/n^2}$

viii) $h_n = e^{1/n}$.

Établir, lorsque c'est possible, les relations de négligeabilité ou d'équivalence entre :

1. (a_n) et (f_n)
2. (b_n) et (c_n)
3. (d_n) et (e_n)
4. (g_n) et (h_n)
5. (c_n) et (g_n)
6. (d_n) et (h_n)

Exercice 5 ().

Savoir-Faire

- Calculer une limite à l'aide des équivalents et/ou par mise en facteur des termes dominants

Déterminer les limites des suites suivantes :

a) $a_n = \dfrac{n^2 - 3n + 1}{n^2 + 2}$

b) $b_n = \dfrac{5^n - 2^n}{5^n + 3^n}$

c) $c_n = \dfrac{2e^n - 1}{e^n + 1}$

d) $d_n = \dfrac{e^n + n^{-1/2}}{e^{-n} + \ln(n)}$

e) $e_n = \dfrac{2n^3 + e^{-n}}{n^3 + e^{-2n}}$

Exercice 6 ().

Savoir-Faire

- Calculer une limite à l'aide des équivalents et/ou par mise en facteur des termes dominants

Déterminer les limites des suites suivantes :

a) $f_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$

b) $g_n = \sqrt{\ln(n^2+1)}$

c) $h_n = \dfrac{\ln\left(n^4 + 4\right)}{n+1}$

d) $i_n = \ln(e^n + n) - n$

e) $j_n = \dfrac{\sqrt{n^2+1} + \ln(n)}{\sqrt{n+1}}$

Exercice 7 ().

Savoir-Faire

- Utiliser le théorème de composition des limites

Déterminer la limite des suites dont les termes généraux sont les suivants :

a) $a_n = e^{\sin(1/n)}$

b) $b_n = \cos\left(\dfrac{1+n\pi}{3n}\right)$

c) $c_n = \sqrt[n]{n}$

d) $d_n = \sqrt[n]{\dfrac{1}{n}}$

Exercice 8 ().

Savoir-Faire

- Connaître les limites de suites de référence
- Calculer un équivalent à l'aide de l'échelle de négligeabilité
- Appliquer les règles de calcul d'équivalents
- Calculer une limite à l'aide des équivalents et/ou par mise en facteur des termes dominants
- Utiliser le théorème de composition des limites

1. Déterminer des équivalents les plus simples des suites de termes généraux suivants. En déduire

la limite de chacune de ces suites.

$$u_n = n^3 - \frac{\ln n}{n} \qquad v_n = 3^n - e^{2n} + n \qquad w_n = \frac{6 + n - 4\ln n}{\sqrt{n} + \ln n}$$

$$x_n = \frac{7n + \ln n}{\sqrt{n}\ln n - 2n} \qquad y_n = \frac{\ln(4n)}{2\ln(3n^2)} \qquad z_n = \frac{2^n - e^n}{e^{-n} - 1 + 7e^{2n}}$$

2. Calculer

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(n + n^2\right)}{\ln(n)}$$

1.2 Exercices

Exercice 9 ().

Une entreprise industrielle décide de réduire progressivement ses émissions de CO_2 pour atteindre des objectifs environnementaux. La quantité initiale d'émissions est de E_0 sur l'année.

Chaque année, l'entreprise met en place des mesures qui réduisent les émissions de 10% par rapport à l'année précédente.

La quantité d'émissions de CO_2 après n années est modélisée par la suite $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ E_n = E_0 \times (0.9)^n$$

1. Si l'objectif est de réduire les émissions de CO_2 à moins de 10 tonnes, déterminez au bout de combien d'années cet objectif sera atteint si E_0 = 100 tonnes

2. On pose $\varepsilon > 0$. À partir de quel indice n a-t-on $|E_n| \leq \varepsilon$?

Exercice 10 ().

Une organisation non-gouvernementale (ONG) a lancé un programme de reforestation pour lutter contre la déforestation. Chaque année, l'ONG plante de plus en plus d'arbres : elle plante 5% d'arbres en plus par rapport au nombre total d'arbres de l'année précédente.

Le nombre d'arbres plantés la première année est noté A_0. La suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ modélise le nombre d'arbres total après plantation l'année n. Elle est définie explicitement par :

$$A_n = A_0 \times (1.05)^n$$

1. Si l'objectif est d'avoir au moins 10 000 arbres,

après combien d'années cet objectif sera-t-il atteint ?

2. Soit $A > 0$. À partir de quel entier n a-t-on $A_n \geq A$?

Exercice 11 ().

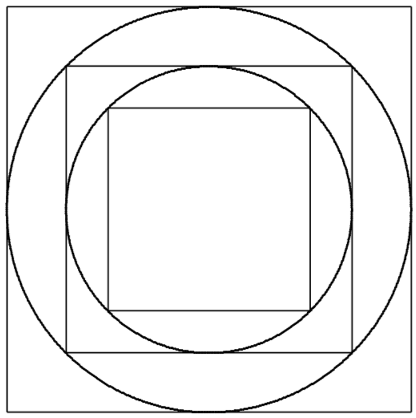
Dessiner deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, **l'une dont tous les termes sont plus grand que 1 et l'autre qui possède une infinité de termes plus grands que 1 et une infinité de termes plus petits que 1**, pour lesquelles la phrase suivante est vraie :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - 1| \leq \varepsilon$$

Exercice 12 ().

L'image ci-dessous représente un carré de côté 1cm, dans lequel s'inscrit un cercle, dans lequel s'inscrit de nouveau un carré, dans lequel s'inscrit de nouveau un cercle, etc... Même si la figure ne le montre pas, ce processus peut être continué indéfiniment. On pose $L_1 = 1$ la longueur du côté du premier (le plus grand) carré, L_2 la longueur du côté du second carré, L_3 celle du troisième carré, etc.

1. Calculer L_2 puis L_3
2. Soit $n \geq 1$ un nombre entier et posons L_n la longueur du côté du $n$ième carré. Établir un lien entre L_{n+1} et L_n. *(une telle relation est appelée définition de la suite par récurrence)*
3. Calculer L_{20}, puis exprimer de manière générale L_n en fonction de n *(une telle expression est appelée définition explicite de la suite)*



Exercice 13 ().

Dans une université de 1000 étudiant·e·s, trois étudiants mal intentionnés décident à 7h du matin de propager durant la journée une fake news d'annulation des examens du lendemain.

Ils se disent que toutes les heures, chaque étudiant connaissant la rumeur la transmettra à un autre étudiant qui n'était pas au courant. On note, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, S_n le nombre d'étudiant au courant de la rumeur après n heures. On pose également $S_0 = 3$.

1. À quoi correspond le fait de poser $S_0 = 3$?
2. Calculer S_1, S_2 et S_3.
3. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, exprimer S_{n+1} en fonction de S_n.
4. Déterminer alors S_n, calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$ et expliquer un défaut de cette modélisation.

Exercice 14 ().

Soient u_n et v_n deux suite Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? (si la proposition est fausse, trouver un contre-exemple (par exemple pris parmi les suites déjà rencontrées), si elle est vraie la démontrer.

a) Si $u_n \sim v_n$ alors $e^{u_n} \sim e^{v_n}$.

b) Si $u_n - v_n$ tend vers 0 alors $u_n \sim v_n$.

c) Si $u_n - v_n$ tend vers 0 alors $e^{u_n} \sim e^{v_n}$

d) Si u_n, v_n sont positives et $u_n \sim v_n$ alors $\ln(u_n) \sim \ln(v_n)$.

Exercice 15 ().

Dans cet exercice, (u_n) et (w_n) désignent deux suites réelles.

1. Démontrer que si $\lim u_n - w_n = 0$, alors $e^{u_n} \sim e^{w_n}$.
2. Démontrer que si $u_n \sim w_n$ et si $w_n << z_n$ alors $u_n << z_n$.
3. Démontrer les résultats de cours suivants :

(a) si $u_n << w_n$, alors pour toutes constantes $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\alpha u_n + \beta w_n \underset{+\infty}{\sim} \beta w_n$$

(b) si $u_n \sim u_n'$ et $w_n \sim w_n'$, alors $u_n w_n \sim u_n' w_n'$

(c) si $u_n \sim u_n'$ et $w_n \sim w_n'$, alors $\dfrac{u_n}{w_n} \sim \dfrac{u_n'}{w_n'}$

(d) si $\alpha \in \mathbb{R}$ et si $u_n \sim w_n$, alors $u_n^\alpha \sim w_n^\alpha$

(e) si $u_n \underset{+\infty}{\sim} w_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

Exercice 16 ().

Soit $f :]-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{1+x}$

On rappelle que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = f'(0) = \frac{1}{2}$$

1. À l'aide de la limite donnée, déterminer un équivalent simple de la suite $\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1$.
2. Soit (u_n) est une suite à valeurs dans $]-1, +\infty[$, non nulle à partir d'un certain rang, telle que $\lim u_n = 0$. Démontrer que

$$\sqrt{1+u_n} - 1 \sim \frac{u_n}{2}$$

3. Calculer un équivalent simple de $\sqrt{n+2} - \sqrt{n}$.
4. En déduire la limite de $\sqrt{n+2} - \sqrt{n}$ lorsque $n \to +\infty$.
5. Déterminer un équivalent puis calculer la limite de

$$\frac{n\ln(n) + e^n}{e^{-n} - \frac{1}{n}}$$

Exercice 17 ().

On rappelle ci-dessous la définition de suite *bornée* ainsi que la définition de l'inégalité triangulaire.

Définition 1 : Suite bornée

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels est dite *bornée* s'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|u_n| \leq C$$

Proposition 1 : Inégalité triangulaire

Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a :

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

En utilisant la définition de la limite, démontrer que toute suite convergente est bornée.

Exercice 18 (). *Théorème de Cesàro*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombre réels. On pose, pour tout entier $n \geq 0$:

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k$$

1. Démontrer que pour tout $N_0 \in \mathbb{N}$ et que pour tout

entier $n > N_0$:

$$|S_n - \ell| \leq \frac{1}{n}\left(\sum_{k=0}^{N_0-1} |u_k - \ell| \quad + \sum_{k=N_0}^{n-1} |u_k - \ell|\right)$$

2. Soit $\varepsilon > 0$. En choisissant notamment judicieusement N_0, démontrer que qu'il existe un rang N_1 à partir duquel $|S_n - \ell| \leq \varepsilon$
3. Qu'en conclure ?

Exercice 19 ().

On appelle *suite de Cauchy* toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall p, q \geqslant N, \quad \left|u_p - u_q\right| < \varepsilon$$

1. Montrer que toute suite de Cauchy est bornée.
2. (a) Montrer que toute suite convergente est de Cauchy.
   (b) Réciproquement, montrer que toute suite de Cauchy est convergente.
3. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \leqslant b$ et $f : [a, b] \longrightarrow [a, b]$ une fonction contractante, i.e. telle que :

$$\exists c \in [0, 1[, \quad \forall x, y \in [a, b], \quad |f(x) - f(y)| \leqslant c|x - y|$$

On souhaite montrer que f possède alors un et un seul point fixe (théorème du point fixe de Banach), c'est-à-dire qu'il existe un unique $x \in [a,b]$ tel que $f(x) = x$.

(a) En raisonnant par l'absurde, montrer qu'il ne peut pas exister deux points fixes différents.

(b) À l'aide de la caractérisation séquentielle de la continuité, montrer que f est continue sur $[a,b]$.

(c) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite quelconque pour laquelle tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad u_{n+1} = f(u_n)$.

Montrer que pour tous $p \in \mathbb{N}$ et $q \geqslant p$:

$$\left|u_p - u_q\right| \leqslant c^p \frac{\left|u_1 - u_0\right|}{1 - c}$$

(d) En déduire que f possède un point fixe.