

## Corrigé du Partiel de mars – algèbre linéaire –

**Exercice 1.** (5,5 points) Dans chacune des questions suivantes on introduit un espace vectoriel connu  $E$ . Les sous-ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de  $E$  (en justifiant la réponse) où :

1.  $E := \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , et  $A := \{f \in E \mid \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} f = \lambda \cos + \mu \sin\}$ . Quelle est alors la dimension de  $A$  ? On voit sur la définition de  $A$  que  $A$  est l'espace vectoriel engendré dans  $E$  par les éléments  $\cos$  et  $\sin$ . C'est donc en particulier un sous-espace vectoriel de  $E$ . De plus il est engendré par une famille de cardinal 2 et cette famille est libre (en effet si  $a \cos + b \sin = 0$  alors en évaluant cette égalité de fonctions en 0 on obtient  $a = 0$  puis en évaluant en  $\frac{\pi}{2}$  on obtient  $b = 0$ ). Ainsi  $A$  est de dimension 2.
2.  $E := \mathbb{R}^2$  et  $B := \{(x, y) \in E \mid x \geq y\}$ . Représenter graphiquement l'ensemble  $B$ . L'élément  $(1, 0)$  est dans  $B$  mais son opposé  $-(1, 0) = (-1, 0)$  n'est pas dans  $B$ . Ainsi  $B$  n'est pas un sous-espace vectoriel de  $E$ . La représentation graphique de  $B$  dans le plan  $(0xy)$  est le demi-espace situé sous la première diagonale  $y = x$ .
3.  $E := \mathbb{R}^3$ ,  $r \in \mathbb{R}$  et  $S_r := \{(x, y, z) \in E \mid x^2 + y^2 + z^2 = r\}$ . (On discutera en fonction de la valeur de  $r$ ). On distingue selon que  $r < 0$ ,  $r = 0$  ou  $r > 0$  :
  - (a) si  $r < 0$  alors l'équation  $x^2 + y^2 + z^2 = r$  n'a pas de solutions réelles, donc  $S_r$  est vide donc ne contient pas  $(0, 0, 0)$  ; ce n'est pas un sous-espace vectoriel de  $E$ .
  - (b) si  $r = 0$  alors  $S_0$  est le singleton  $\{(0, 0, 0)\}$  ; c'est bien un sous-espace vectoriel de  $E$ .
  - (c) si  $r > 0$  alors  $(0, 0, 0)$  n'est pas dans  $S_r$  qui n'est donc pas un sous-espace vectoriel de  $E$ .
4.  $E := M_2(\mathbb{R})$  et  $C := \left\{M \in E \mid \text{il existe } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ tels que } M := \begin{pmatrix} a+b & c \\ 2c & -b \end{pmatrix}\right\}$ . La matrice nulle est bien dans  $C$  (on prend  $a = b = c = 0$ ). Par ailleurs si  $M, N \in C$  et si  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  alors il existe  $a, b, c \in \mathbb{R}$  et il existe  $x, y, z \in \mathbb{R}$  tels que

$$\lambda M + \mu N = \lambda \begin{pmatrix} a+b & c \\ 2c & -b \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} x+y & z \\ 2z & -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda a + \mu x) + (\lambda b + \mu y) & (\lambda c + \mu z) \\ 2(\lambda c + \mu z) & -(\lambda b + \mu y) \end{pmatrix}.$$

Or la dernière matrice est bien de la forme attendue pour être dans  $C$ , donc  $\lambda M + \mu N$  est dans  $C$  et  $C$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

**Exercice 2.** (3,5 points) Dans l'espace vectoriel des matrices  $2 \times 2$  on considère l'ensemble suivant introduit à l'exercice 1 et dont on admettra ici que c'est un sous-espace vectoriel de  $M_2(\mathbb{R})$  :

$$C := \left\{M \in M_2(\mathbb{R}) \mid \text{il existe } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ tels que } M := \begin{pmatrix} a+b & c \\ 2c & -b \end{pmatrix}\right\}.$$

1. Montrer que si  $M$  est dans  $C$  alors il existe  $a, b, c \in \mathbb{R}$  tels que

$$M = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Par définition, si  $M \in C$  alors il existe  $a, b, c \in \mathbb{R}$  tels que  $M := \begin{pmatrix} a+b & c \\ 2c & -b \end{pmatrix}$ . Or on voit

que  $a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & c \\ 2c & -b \end{pmatrix} = M$ . D'où l'existence recherchée.

2. Montrer que l'on a unicité des  $a, b, c$  précédents. Soient  $a, b, c \in \mathbb{R}$  et soient  $x, y, z \in \mathbb{R}$  tels que  $a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ . On a donc  $\begin{pmatrix} a+b & c \\ 2c & -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y & z \\ 2z & -y \end{pmatrix}$ . En identifiant les coefficients des deux matrices on voit que  $c = z$  et  $b = y$  puis que  $a = x$  d'où l'unicité recherchée.
3. Donner une base de  $C$ . Quelle est la dimension de  $C$ ? La question 1. montre que  $C$  est l'espace vectoriel engendré par la famille  $\left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \right)$ , et la question 2. montre la décomposition de toute matrice de  $C$  sur cette famille est unique. Cette famille est donc une base de  $C$ .

**Exercice 3.** (6,5 points) On note  $P := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y - 5z = 0\}$ . On pose par ailleurs  $v_1 := (1, 2, 3)$ ,  $v_2 := (1, -1, 1)$  et  $v_3 := (0, 3, 1)$ .

1. Montrer que  $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ . La famille  $\mathcal{B}$  est de cardinal 3; c'est donc une base de  $\mathbb{R}^3$  si c'est une famille libre. Considérons donc la matrice associée au système  $xv_1 + yv_2 + zv_3 = 0$  et échelonons la avec l'algorithme du pivot de Gauss (sur les lignes) :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \left[ \begin{array}{ll} L_2 & \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 & \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{array} \right] \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \left[ \begin{array}{ll} L_3 & \leftarrow 3L_3 - 2L_2 \end{array} \right]$$

Il y a 3 pivots, donc les trois inconnues sont principales, donc en revenant au système on obtient  $x = y = z = 0$  ce qui permet de conclure : la famille est libre; c'est une base de  $\mathbb{R}^3$ .

2. Justifier que  $P$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ .  $P$  est l'ensemble des solutions dans  $\mathbb{R}^3$  d'un système homogène d'équations linéaires. Par le cours c'est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ .
3. Donner une base de  $P$  et sa dimension. Soit  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  un vecteur quelconque. Il est dans  $P$  si et seulement si  $2x + y - 5z = 0$ . Ce système se réécrit sous forme échelonnée de la façon suivante :  $y = -2x + 5z$ .<sup>1</sup> Ainsi  $(x, y, z)$  est dans  $P$  si et seulement si il est de la forme

$$(x, y, z) = (x, -2x + 5z, z) = x(1, -2, 0) + z(0, 5, 1).$$

Ainsi en posant  $e_1 := (1, -2, 0)$  et  $e_2 := (0, 5, 1)$  on voit que la famille  $(e_1, e_2)$  est génératrice dans  $P$ . De plus ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc cette famille est libre : c'est une base de  $P$ , de cardinal 2 donc  $P$  est de dimension 2.

4. Est-ce que les vecteurs  $v_1, v_2, v_3$  sont dans  $P$ ? On vérifie en utilisant l'équation de  $P$  que aucun des vecteurs  $v_1, v_2, v_3$  n'est dans  $P$ .
5. Compléter la base obtenue de  $P$  en une base de  $\mathbb{R}^3$  à l'aide des vecteurs de  $\mathcal{B}$ . On a, avec la base  $(e_1, e_2)$  de  $P$ , une famille libre de  $\mathbb{R}^3$  de cardinal 2. Il suffit donc par cardinalité d'ajouter un vecteur, tel que la famille obtenue soit encore libre, pour avoir une base de  $\mathbb{R}^3$ . Or  $v_1$  n'est pas dans  $P = \text{Vect}(e_1, e_2)$  donc par le cours la famille  $(e_1, e_2, v_1)$  est libre. C'est une base de  $\mathbb{R}^3$ .

1. on a ici choisi de manière arbitraire  $y$  comme variable principale mais on aurait pu faire un autre choix.

**Exercice 4.** (2,5 points) Dans  $\mathbb{R}^4$ , on considère le sous-espace vectoriel  $V$  engendré par les vecteurs  $v_1 := (1, 2, 3, 4)$  et  $v_2 := (0, 1, 0, 1)$ . Donner un système d'équations pour  $V$  ainsi que sa dimension. L'espace vectoriel  $V$  est engendré par deux vecteurs ( $v_1$  et  $v_2$ ) qui ne sont pas colinéaires; la dimension de  $V$  est donc 2. Pour trouver un système d'équations de  $V$  on dit qu'un vecteur  $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$  est dans  $V$  si et seulement si il est combinaison linéaire de  $v_1$  et  $v_2$ , ie de la forme  $\lambda v_1 + \mu v_2$  pour un certain couple  $(\lambda, \mu)$  de nombres réels. On échelonne le système correspondant et les équations de compatibilité que l'on obtiendra formeront un système d'équations pour  $V$ .

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \lambda & & = & x \\ 2\lambda & + & \mu & = & y \\ 3\lambda & & & = & z \\ 4\lambda & + & \mu & = & t \end{cases} \\ & \sim \begin{cases} L_2 & \leftarrow & L_2 - 2L_1 \\ L_3 & \leftarrow & L_3 - 3L_1 \\ L_4 & \leftarrow & L_4 - 4L_1 \end{cases} \\ & \begin{cases} \lambda & & = & x \\ \mu & = & y - 2x \\ 0 & = & z - 3x \\ \mu & = & t - 4x \end{cases} \\ & \sim \begin{cases} \lambda & & = & x \\ \mu & = & y - 2x \\ 0 & = & z - 3x \\ 0 & = & t - 2x - y \end{cases} \quad [ \quad L_4 \quad \leftarrow \quad L_4 - L_2 \quad ] \end{aligned}$$

on trouve donc pour équations pour  $V$  les deux équations :  $z - 3x = 0$  et  $t - 2x - y = 0$ .

**Exercice 5.** (4 points) Dans l'espace vectoriel  $\mathbb{R}_2[X]$  des polynômes de degré au plus 2 on considère les polynômes  $P_1 := 1 + X$ ,  $P_2 := 2 - X + 3X^2$  et  $P_3 = 4$ .

1. Rappeler (sans preuve) la dimension de  $\mathbb{R}_2[X]$  et quelle est sa base canonique. Par le cours on sait que  $\mathbb{R}_2[X]$  est un espace vectoriel de dimension 3 et de base canonique  $(1, X, X^2)$ .
2. Montrer que  $\mathcal{B} := (P_1, P_2, P_3)$  est une base de  $\mathbb{R}_2[X]$ . Cette famille est de cardinal 3 dans un espace vectoriel de dimension 3; il suffit de montrer que c'est une famille libre pour conclure. Soit donc  $x, y, z$  trois réels tels que  $xP_1 + yP_2 + zP_3 = 0$ . Ceci se réécrit sous la forme

$$3yX^2 + (x - y)X + (x + 2y + 4z) = 0.$$

Or la famille  $(1, X, X^2)$  est libre donc cette écriture implique que  $y = 0$  puis que  $x = 0$  et que  $z = 0$ . Donc la famille  $(P_1, P_2, P_3)$  est une base de  $\mathbb{R}_2[X]$ .

3. Écrire les coordonnées du polynôme  $P := 17 + 3X - 6X^2$  dans la base  $\mathcal{B}$ . On cherche  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  tels que

$$P = xP_1 + yP_2 + zP_3.$$

On a donc  $-6X^2 + 3X + 17 = 3yX^2 + (x - y)X + (x + 2y + 4z)$ . En identifiant dans la base  $(1, X, X^2)$  on voit que  $y = -2$ ,  $x = 1$  et  $z = 5$ . Les coordonnées de  $P$  dans la base

$$\mathcal{B} = (P_1, P_2, P_3) \text{ sont donc données par } \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}.$$