Partiel de mars – algèbre linéaire – Durée : 2h

La précision des arguments utilisés et la qualité de la rédaction entreront pour une part importante dans l'appréciation de la copie. Merci de ne pas écrire au crayon à papier. L'utilisation de la calculatrice, du téléphone portable ou de tout objet connecté ainsi que des notes de cours/TD est interdite.

Toutes les réponses à une interrogation (avec un ?) doivent recevoir une justification.

Exercice 1. (5,5 points) Dans chacune des questions suivantes on introduit un espace vectoriel connu E. Les sous ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de E (en justifiant la réponse) où :

1. $E := \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et $A := \{f \in E \mid \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}\ f = \lambda \cos + \mu \sin\}$. Quelle est alors la dimension de A ?
2. $E := \mathbb{R}^2$ et $B := \{(x, y) \in E \mid x \geqslant y\}$. Représenter graphiquement l'ensemble B.
3. $E := \mathbb{R}^3$, $r \in \mathbb{R}$ et $S_r := \{(x, y, z) \in E \mid x^2 + y^2 + z^2 = r\}$. (On discutera en fonction de la valeur de r).
4. $E := M_2(\mathbb{R})$ et $C := \left\{ M \in E \mid \text{il existe } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ tels que } M := \begin{pmatrix} a+b & c \\ 2c & -b \end{pmatrix} \right\}$.

Exercice 2. (3,5 points) Dans l'espace vectoriel des matrices 2×2 on considère l'ensemble suivant introduit à l'exercice 1 et dont on admettra ici que c'est un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$:

$$C := \left\{ M \in M_2(\mathbb{R}) \mid \text{il existe } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ tels que } M := \begin{pmatrix} a+b & c \\ 2c & -b \end{pmatrix} \right\}.$$

1. Montrer que si M est dans C alors il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que
$$M = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$
2. Montrer que l'on a unicité des a, b, c précédents.
3. Donner une base de C. Quelle est la dimension de C ?

Exercice 3. (6,5 points) On note $P := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y - 5z = 0\}$. On pose par ailleurs $v_1 := (1, 2, 3)$, $v_2 := (1, -1, 1)$ et $v_3 := (0, 3, 1)$.

1. Montrer que $\mathscr{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Justifier que P est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
3. Donner une base de P et sa dimension.
4. Est-ce que les vecteurs v_1, v_2, v_3 sont dans P ?
5. Compléter la base obtenue de P en une base de $\mathbb{R}^3$ à l'aide des vecteurs de $\mathscr{B}$.

Exercice 4. (2,5 points) Dans $\mathbb{R}^4$, on considère le sous-espace vectoriel V engendré par les vecteurs $v_1 := (1, 2, 3, 4)$ et $v_2 := (0, 1, 0, 1)$. Donner un système d'équations pour V ainsi que sa dimension.

Exercice 5. (4 points) Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ des polynômes de degré au plus 2 on considère les polynômes $P_1 := 1 + X$, $P_2 := 2 - X + 3X^2$ et $P_3 = 4$.

1. Rappeler (sans preuve) la dimension de $\mathbb{R}_2[X]$ et quelle est sa base canonique.
2. Montrer que $\mathscr{B} := (P_1, P_2, P_3)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Écrire les coordonnées du polynôme $P := 17 + 3X - 6X^2$ dans la base $\mathscr{B}$.