

QCM

TEST

GEI blanc

Aucun document n'est autorisé. L'usage de la calculatrice est interdit.

Les questions sont par défaut posées au pluriel mais il peut y avoir 0, 1 ou plusieurs réponses.

Question 1 ♣ La fonction $f : x \mapsto \frac{x-2}{x+1}$ vérifie est telle que :

☐ A $f :]-1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est surjective.

☐ B f est convexe sur $] -1, +\infty[$.

☐ C L'équation $f(x) = -2$ a une unique solution sur $\mathbb{R}$ privé de -1 .

☐ D f est concave sur $] -1, +\infty[$.

☐ E $f :]-1, +\infty[\rightarrow]-\infty, 1[$ est bijective.

Question 2 ♣ La matrice $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ a pour valeurs propres.

☐ A $-2, 5, 0$

☐ B $-2, 1, 3$

☐ C $-2, 5$

☐ D $-1, 3, 0$

☐ E $-2, 0, 3$

Question 3 ♣ La fonction $f : x \mapsto x|x|$ définie sur $\mathbb{R}$ est.

☐ A continue sur $\mathbb{R}$

☐ B de classe C^1 sur $\mathbb{R}$

☐ C dérivable sur $\mathbb{R}$

☐ D bornée sur $\mathbb{R}$

☐ E impaire

Question 4 ♣ Soit f la fonction $f : x \mapsto \frac{e^{-x}}{\sqrt{|x|}}$. Alors

☐ A $\int_{-\infty}^{-1} f(t)dt$ converge

☐ B $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ converge

☐ C $\int_0^1 f(t)dt$ converge

☐ D $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge

☐ E $\int_0^2 f(t)dt$ converge

Question 5 ♣ Soient les séries entières $\sum \sin(n)x^n$ et $\sum \frac{x^n}{n^2}$. Quelles réponses sont vraies?

- ☐ Les deux séries ont le même rayon de convergence.
- ☐ Ces deux séries convergent sur $] -1, 1[$.
- ☐ Au moins une des deux séries converge sur $] -2, 2[$.
- ☐ Ces deux séries convergent sur $[-1, 1]$.
- ☐ Au moins une des deux séries converge sur $[-1, 1]$.

Question 6 ♣ La probabilité pour une famille d'avoir un garçon pour premier enfant est $\frac{1}{2}$, celle d'avoir une fille $\frac{1}{2}$. Si on a un garçon au premier enfant, la probabilité d'avoir une fille au second est $\frac{1}{4}$. Si on a une fille au premier enfant, celle d'avoir une fille second est $\frac{2}{3}$. On note N_G la variable aléatoire donnant le nombre de garçons

- ☐ La probabilité d'avoir deux filles est strictement supérieure à $\frac{1}{3}$
- ☐ $E(N_G) > 1$
- ☐ La probabilité d'avoir un garçon comme premier enfant sachant que la famille a une fille comme deuxième enfant est de $\frac{3}{11}$
- ☐ La probabilité d'avoir au moins une fille est supérieure à $\frac{1}{2}$
- ☐ On a plus de chances d'avoir au moins une fille que d'avoir au moins un garçon.

Question 7 ♣ On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, $f : (x, y, z) \mapsto (3x + y, x - y + z, 4x + z)$. Alors

- ☐ le noyau est de dimension 2 et l'image de dimension 2
- ☐ f est surjective.
- ☐ le noyau est de dimension 1 et l'image de dimension 2
- ☐ f est injective.
- ☐ le noyau est de dimension 2 et l'image de dimension 1

Question 8 ♣ Soit $p \in]0, 1[$, X, Y deux variables aléatoires indépendantes telles que X suit une loi binomiale de paramètres $(5, p)$ et Y une loi binomiale de paramètres $(4, 1 - p)$.

- ☐ Il existe une valeur de p telle que $Var(4X) = Var(5Y)$.
- ☐ Il existe une valeur de p telle que $E(4X) = E(5Y)$.
- ☐ $\forall p \in]0, 1[, P(X + Y = 0) = P(X + Y = 9)$.
- ☐ Pour toute valeur de p , $E(X + Y) \geq 2$
- ☐ Pour toute valeur de p , $Var(X + Y) \geq 2$

Question 9 ♣ Soit l'équation différentielle : $y' - y = 1$.

- ☐ Il existe une solution de cette équation qui est concave sur $\mathbb{R}$.
- ☐ Toute solution de cette équation est concave sur $\mathbb{R}$.
- ☐ Toute solution f vérifie $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = +\infty$
- ☐ Toute solution f vérifie $\lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = -1$
- ☐ Si une solution f vérifie $f(0) = 0$ alors $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = +\infty$

Question 10 ♣ L'intégrale multiple $\iint_D \sin(x+y) dx dy$ où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 \mid x+y \leq \pi\}$ vaut

- ☐ A 2π
☐ B $-\pi$
☐ C $\int_0^\pi 1 + \sin(x) dx$
☒ D π
☒ E $\int_0^\pi 1 + \cos(x) dx$

Question 11 ♣ Soit la suite définie pour tout n entier naturel par $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 2$

- ☒ A Si $u_0 > -4$, (u_n) est décroissante.
☐ B Si $u_0 > -4$, (u_n) est croissante.
☒ C (u_n) converge
☒ D (u_n) est bornée
☐ E $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

Question 12 ♣ Soient a et b deux nombres réels avec $a > 1$ et $b > 1$. La valeur de l'intégrale $\int_a^b \frac{1}{x \ln(x)} dx$ est

- ☐ A on ne peut pas calculer explicitement cette intégrale
☐ B $\frac{1}{b \ln(b)} - \frac{1}{a \ln(a)}$
☐ C $\frac{\ln(b)}{\ln(a)} - \frac{\ln(a)}{\ln(b)}$
☐ D $\ln(b) - \ln(a)$
☒ E $\ln\left(\frac{\ln(b)}{\ln(a)}\right)$

Question 13 ♣ Soit $P(x) = 2x^4 - x^3 - 4x^2 + 3x$. Le nombre de racines réelles deux à deux distinctes est

- ☒ A 4
☐ B 1
☐ C 0
☐ D 2
☐ E 3

Question 14 ♣ Pour combien de valeurs réelles de m le vecteur $(m, 1, 1)$ est-il une combinaison linéaire des vecteurs $(-1, -m, -1)$, $(-1, -1, -m)$?

- ☐ A une valeur
☐ B aucune valeur
☒ C deux valeurs
☐ D toutes les valeurs
☐ E trois valeurs

Question 15 ♣ Vous jetez un dé non pipé, et le résultat obtenu (entre 1 et 6) détermine le nombre de fois que vous lancez une pièce de monnaie équilibrée. La probabilité d'obtenir à chaque fois pile est

☐ A $\frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^2 + \dots + (\frac{1}{2})^6$

☐ B $(\frac{1}{2})^{7/2}$

☐ C $(\frac{1}{2})^6$

☒ $\frac{1}{6}(1 - \frac{1}{2^6})$

☐ E $\frac{1}{6}$

Question 16 ♣ Soit $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ une application continue. La fonction $x \in \mathbb{R}_+, f(x) = \int_0^x \sin(u)g(x-u)du$ est une solution de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}_+$

☐ A $y' = g(0) \sin(x)$

☐ B $\sin(x)y' - \cos(x)y = \sin(x)g(x)$

☐ C si g n'est pas dérivable, f non plus en général

☒ $y'' + y = g(x)$

☐ E $\cos(x)y' + \sin(x)y = \cos(x)g(x) - g(0)$

Question 17 ♣ Soit A une matrice complexe $n \times n$ ($n \geq 2$) et soit $B = A^2$. Quelle est parmi ces propositions la seule qui est fausse?

☐ A A diagonale $\implies B$ diagonale

☒ B diagonale $\implies A$ diagonalisable

☐ C $\mu \in \mathbb{C}$ valeur propre de $A \implies \mu^2$ valeur propre de B

☐ D A diagonalisable $\implies B$ diagonalisable

☐ E $\lambda = \mu^2 \in \mathbb{C}$ valeur propre de $B \implies \mu$ ou $-\mu$ (ou μ et $-\mu$) valeur(s) propre(s) de A

Question 18 ♣ Le module et un argument du nombre complexe $(1-2i)^2(1+7i) \exp(-2 \ln(5) + i\frac{\pi}{3})$ sont donnés par

☐ A $5, -\pi/12$

☐ B $\sqrt{2}, 7\pi/12$

☒ $\sqrt{2}, \pi/12$

☐ D $5\sqrt{2}, 0$

☐ E $5, 7\pi/12$

Question 19 ♣ La matrice $\begin{pmatrix} 2 & a & 0 \\ -1 & 1 & b \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ admet le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ comme vecteur propre

☐ A pour une infinité de paires (a, b) .

☐ B pour aucune paire (a, b) .

☐ C exactement quand $(a, b) = (1, 5)$

☐ D exactement quand $a^2 = 1$ et $b^2 = 25$

☒ exactement quand $(a, b) = (1, 7)$

Question 20 ♣ Le DL à l'ordre 5 en 0 de $\frac{1}{x^2} \ln\left(\frac{1}{1-x^2}\right)$

☐ A x^4 .

☐ B $1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}$.

☐ C $x + \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{3}$

☒ $1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{3}$

☐ E $\frac{1}{x^2} + 1 + x^2 + x^4$

CORRECTION