

# UE Sciences et lumière Ingénierie Physique

## TP1 - questions

Houda Hassini, houda.hassini@onera.fr

A rendre pour le 17/03/2025

**Prénom NOM :**

Soit  $s_1 = [s_{1,0}, s_{1,1}, \dots, s_{1,k}, \dots, s_{1,N-1}] \in \mathbb{R}^N$  et  $s_2 = [s_{2,0}, s_{2,1}, \dots, s_{2,k}, \dots, s_{2,N-1}] \in \mathbb{R}^N$  deux signaux discrets de taille  $N$ , ainsi que  $a$ ,  $b$  et  $c$ , trois signaux discrets de taille 4 tels que :

- $a = [1, 1, -1, -1]$
- $b = [1, -1, -1, -1]$
- $c = [1, -1, 1, -1]$

*Toutes vos réponses doivent être justifiées par une phrase ou un calcul.*

## 1 L'erreur quadratique (EQ)

- Donnez l'expression de l'erreur quadratique pour deux signaux  $s_1$  et  $s_2$ , et le lien entre l'erreur quadratique et l'erreur quadratique moyenne.
- Calculez les erreurs quadratiques moyenne (en précisant les étapes de calculs) de ces signaux entre

eux et notez-les dans un tableau de la forme suivante :

EQM	a	b	c
a			
b			
c			

- Que pouvez-vous dire de la diagonale de ce tableau, c'est-à-dire de l'EQM des signaux avec eux-mêmes ? Faites le lien avec la formule mathématique de l'EQM.
- Que pouvez-vous dire de  $EQM(a,b)$  par rapport à  $EQM(b,a)$  ? Est-ce la même chose pour les autres signaux ? Si oui, comment appelle-t-on cette propriété ? D'où cette propriété vient-elle dans la formule de l'EQM ?
- En regardant les valeurs des échantillons des signaux et le tableau de l'EQM, lequel des signaux  $b$  ou  $c$  est-il le plus proche de  $a$  ?
- Pouvez-vous tirer une règle générale entre la valeur de l'EQM et le fait que les signaux se ressemblent ?

## 2 Le produit scalaire

- Donnez l'expression du produit scalaire pour les signaux  $s_1$  et  $s_2$ .

2. Calculez les produits scalaires (en précisant les étapes de calculs) de ces signaux entre eux et notez

les dans un tableau de la forme suivante :

...	a	b	c
a			
b			
c			

3. Que pouvez-vous dire de la diagonale de ce tableau, c'est à dire du produit scalaire des signaux avec eux-mêmes ?
4. Que pouvez-vous dire du produit scalaire  $a \cdot b$  par rapport au produit scalaire  $b \cdot a$  ? Est-ce la même chose pour les autres signaux ? Si oui, comment appelle-t-on cette propriété ? D'où cette propriété vient-elle dans la formule du produit scalaire ?
5. En regardant les valeurs des échantillons des signaux et le tableaux du produit scalaire, lequel des signaux b ou c est-il le plus proche de a ?
6. Pouvez-vous tirer une règle générale entre la valeur du produit scalaire et le fait que les signaux sont différents ?

### 3 Lien entre l'erreur quadratique et le produit scalaire

1. Trouvez la valeur de  $\lambda_{min}$  qui minimise l'erreur quadratique entre  $s_1$  et  $\lambda s_2$ . Pour cela :
- Ecrivez l'expression de l'erreur quadratique des signaux  $s_1$  et  $\lambda s_2$ .
  - Dérivez cette expression pour trouvez l'extremum. Quelques conseils :
    - Commencez par développer l'identité remarquable pour obtenir une somme
    - Dérivez par rapport à lambda en vous rappelant que tous les termes ce qui ne contiennent pas de lambda s'annulent
    - Il ne faut pas simplifier les symboles sommes, car tous les  $s_{1,k}$  et  $s_{2,k}$  dépendent de l'indice  $k$  qui est défini par symboles de la somme
  - Vérifiez mathématiquement que la valeur trouvée est bien un minimum.
  - Vérifiez votre valeur en calculant l'EQ pour plusieurs valeurs de  $\lambda$  :  $\lambda = 1$ ,  $\lambda = \lambda_{min} - 0.5$  et  $\lambda = \lambda_{min}$  pour les vecteurs  $s_1 = [0, 1]$  et  $s_2 = [1, 1]$ .
2. La valeur de  $\lambda_{min}$  minimisant l'EQ entre  $s_1$  et  $\lambda s_2$  est-il la même que celle minimisant l'EQM entre  $s_1$  et  $\lambda s_2$  ?
3. Comment l'expression du produit scalaire apparaît-elle dans l'expression de  $\lambda_{min}$  ?
4. Interprétation géométrique de l'expression de  $\lambda_{min}$  :
- L'EQ peut être vue comme la norme (la longueur) d'un signal  $s_{EQ} = s_2 - s_1$ . Faites un schéma représentant  $s_1 = [0, 1]$  et  $s_2 = [1, 1]$  et le vecteur  $s_{EQ}$  dans ce cas.
  - Compléter le schéma avec les vecteur,  $\lambda_{min}s_2$  et  $(\lambda_{min} - 0.5)s_2$ , ainsi que les vecteur  $s_{EQ}$  correspondant à chacun de ces cas.
  - La norme de  $s_{EQ}$  est-elle bien minimum dans le cas  $\lambda_{min}s_2$  ?
  - Quelle propriété géométrique remarquez vous pour les vecteurs  $\lambda_{min}s_2$  et  $s_{EQ}$
  - Pouvez-vous le démontrer par le calcul ?
5. Interprétez les valeurs de  $\lambda_{min}$  et de  $EQ(s_1, \lambda_{min}s_2)$  pour les cas extrêmes suivant :
- $\lambda_{min} = 0$
  - $s_2 = \alpha s_1$