

UE Sciences et lumière

Ingénierie Physique

TP1 - questions

Houda Hassini, houda.hassini@onera.fr

A rendre pour le 17/03/2025

Prénom NOM :

Soit $s_1 = [s_{1,0}, s_{1,1}, \dots, s_{1,k}, \dots, s_{1,N-1}] \in \mathbb{R}^N$ et

$s_2 = [s_{2,0}, s_{2,1}, \dots, s_{2,k}, \dots, s_{2,N-1}] \in \mathbb{R}^N$ deux signaux

discrets de taille N , ainsi que a, b et c, trois signaux

discrets de taille 4 tels que :

— $a = [1, 1, -1, -1]$

— $b = [1, -1, -1, -1]$

— $c = [1, -1, 1, -1]$

Toutes vos réponses doivent être justifiées par une phrase ou un calcul.

1 L'erreur quadratique (EQ)

1. Donnez l'expression de l'erreur quadratique pour deux signaux s_1 et s_2 , et le lien entre l'erreur quadratique et l'erreur quadratique moyenne.
2. Calculez les erreurs quadratiques moyenne (en précisant les étapes de calculs) de ces signaux entre eux et notez-les dans un tableau de la forme

suivante :

EQM	a	b	c
a			
b			
c			

3. Que pouvez-vous dire de la diagonale de ce tableau, c'est-à-dire de l'EQM des signaux avec eux-mêmes ? Faites le lien avec la formule mathématique de l'EQM.
4. Que pouvez-vous dire de $EQM(a,b)$ par rapport à $EQM(b,a)$? Est-ce la même chose pour les autres signaux ? Si oui, comment appelle-t-on cette propriété ? D'où cette propriété vient-elle dans la formule de l'EQM ?
5. En regardant les valeurs des échantillons des signaux et le tableau de l'EQM, lequel des signaux b ou c est-il le plus proche de a ?
6. Pouvez-vous tirer une règle générale entre la valeur de l'EQM et le fait que les signaux se ressemblent ?

2 Le produit scalaire

1. Donnez l'expression du produit scalaire pour les signaux s_1 et s_2 .
2. Calculez les produits scalaires (en précisant les étapes de calculs) de ces signaux entre eux et notez les dans

un tableau de la forme suivante :

$\dots$	a	b	c
a			
b			
c			

3. Que pouvez-vous dire de la diagonale de ce tableau, c'est à dire du produit scalaire des signaux avec eux-mêmes ?
4. Que pouvez-vous dire du produit scalaire $a \cdot b$ par rapport au produit scalaire $b \cdot a$? Est-ce la même chose pour les autres signaux ? Si oui, comment appelle-t-on cette propriété ? D'où cette propriété vient-elle dans la formule du produit scalaire ?
5. En regardant les valeurs des échantillons des signaux

et le tableaux du produit scalaire, lequel des signaux b ou c est-il le plus proche de a ?

6. Pouvez-vous tirer une règle générale entre la valeur du produit scalaire et le fait que les signaux sont différents ?

3 Lien entre l'erreur quadratique et le produit scalaire

1. Trouvez la valeur de λ_{min} qui minimise l'erreur quadratique entre s_1 et λs_2 . Pour cela :
 - a) Ecrivez l'expression de l'erreur quadratique des signaux s_1 et λs_2 .
 - b) Dérivez cette expression pour trouvez l'extremum. Quelques conseils :
 - Commencez par développer l'identité remarquable pour obtenir une somme

- Dérivez par rapport à λ en vous rappelant que tous les termes ce qui ne contiennent pas de λ s'annulent
 - Il ne faut pas simplifier les symboles sommes, car tous les $s_{1,k}$ et $s_{2,k}$ dépendent de l'indice k qui est défini par symboles de la somme
- c) Vérifiez mathématiquement que la valeur trouvée est bien un minimum.
- d) Vérifiez votre valeur en calculant l'EQ pour plusieurs valeurs de λ : $\lambda = 1$, $\lambda = \lambda_{min} - 0.5$ et $\lambda = \lambda_{min}$ pour les vecteurs $s_1 = [0, 1]$ et $s_2 = [1, 1]$.
2. La valeur de λ_{min} minimisant l'EQ entre s_1 et s_2 est-il la même que celle minimisant l'EQM entre s_1 et s_2 ?
3. Comment l'expression du produit scalaire apparaît-elle dans l'expression de λ_{min} ?
4. Interprétation géométrique de l'expression de λ_{min} :

- a) L'EQ peut être vue comme la norme (la longueur) d'un signal $s_{EQ} = s_2 - s_1$. Faites un schéma représentant $s_1 = [0, 1]$ et $s_2 = [1, 1]$ et le vecteur s_{EQ} dans ce cas.
- b) Compléter le schéma avec les vecteur, $\lambda_{min}s_2$ et $(\lambda_{min} - 0.5)s_2$, ainsi que les vecteur s_{EQ} correspondant à chacun de ces cas.
- c) La norme de s_{EQ} est-elle bien minimum dans le cas $\lambda_{min}s_2$?
- d) Quelle propriété géométrique remarquez vous pour les vecteurs $\lambda_{min}s_2$ et s_{EQ}
- e) Pouvez-vous le démontrer par le calcul ?
5. Interprétez les valeurs de λ_{min} et de $EQ(s_1, \lambda_{min}s_2)$ pour les cas extrêmes suivant :
- a) $\lambda_{min} = 0$
- b) $s_2 = \alpha s_1$