

Ingénierie physique : UE Sciences et Santé

Ce que je dois savoir

Flora Weissgerber, flora.weissgerber@onera.fr

12/02/2024

1 Objectifs du cours

L'objectif de ce cours est de vous faire acquérir les bases du traitement du signal discret : la définition d'un signal discret, la comparaison de deux signaux discrets et le rôle du temps dans la transmission de l'information. Pour ce faire, nous utilisons deux outils principaux : les mathématiques et l'informatique (principalement en utilisant le langage de programmation python). En plus des acquis d'apprentissage propres au traitement du signal, s'ajoutent donc des acquis d'apprentissage portant sur ces deux outils.

Dans ce cours, nous allons explorer la notion de **précision fréquentielle**, l'outil du **spectrogramme**, le **filtrage** et la **modulation du signal**. Ce cours fait suite au cours d'ingénierie de l'UE Sciences et Lumière. Les pré-requis sont donc :

- La définition d'un signal discret
- L'échantillonnage et le théorème de Shannon
- La comparaison de deux signaux par le produit scalaire
- L'estimation de la fréquence du signal et la Transformée de Fourier Discrète

Pour faciliter vos recherches sur les notions d'informatique, une traduction anglaise de certains concepts vous sera proposée. Les traductions anglaises seront précédées du mot clef "EN".

2 Définition d'un signal discret

Un signal discret s est un vecteur, c'est à dire un groupe de valeurs prises dans un ordre donné. Les valeurs de ce signal sont appelées des échantillons. Un signal contenant N échantillons est dit de longueur N ou de taille N . Mathématiquement, un signal s'écrit donc :

$$s = [s_0, s_1, \dots, s_k, \dots, s_{N-1}]$$

Les échantillons de s prennent leurs valeurs dans un ensemble de valeurs. Les ensembles les plus courants sont :

- l'ensemble des lettres de l'alphabet : $\{a, b, \dots, z\}$
- l'ensemble des entiers naturels \mathbb{N} , appelés entiers non signés (EN : unsigned integer) en informatique
- l'ensemble des entiers relatifs \mathbb{Z} , appelés entiers signés (EN : signed integer) en informatique.
- l'ensemble des réels \mathbb{R} , appelés nombres à virgule flottante (EN : float) en informatique
- l'ensemble des nombres complexes \mathbb{C} , appelés nombres complexes (EN : complex number) en informatique. Dans ce document nous allons utiliser $j = \sqrt{-1}$. En python, cette valeur se note $1j$.

— uniquement deux valeurs telles que (0,1) ou (1,-1), appelés signaux binaires (EN : binary signal). En informatique, plusieurs types permettent de manipuler les vecteurs en fonction de leur ensemble de valeurs :

- Les chaînes de caractères (EN : string) pour les signaux dont les échantillons prennent leurs valeurs dans $\{a, b, \dots, z\}$
- Les listes (EN : list) et les tableaux (EN : array) de la bibliothèque numpy de python permettent de manipuler tous types de signaux

Il faut néanmoins préciser que l'indexation des vecteurs de taille N en python (et dans la majorité dans langage informatique) se fait de 0 à $N - 1$.

Il est possible de grouper tous les N_{sy} échantillons successifs d'un signal en symboles. Un signal est alors la concaténation de N_{si} sous-signaux de taille N_{sy} . La longueur totale du signal est $N = N_{si} \times N_{sy}$. Pour analyser le signal, il convient souvent de le découper en N_{si} sous-signaux élémentaires représentant chacun un symbole.

Les symboles composant un signal peuvent être représentés dans différents ensembles de valeurs. Deux signaux peuvent donc comporter la même information mais être représentés sous différentes formes. Par exemple :

- Un signal audio échantillonné est représenté par des valeurs réelles. Pour l'encodage wav, chacune de ces valeurs réelles correspond à un ensemble de 16 bits (donc 16 valeurs binaires) qui seront représentés par des trous et des plateaux une fois gravés sur un CD. On a donc trois représentations différentes de la même information.
- Un texte en anglais est représenté par un ensemble de 26 caractères de l'alphabet latin. Par l'encodage UTF-8, chacune de ces lettres est représentée par un ensemble de 8 bits (donc 8 valeurs binaires).
- Chaque touche d'un clavier téléphonique représente un chiffre. La norme DTMF (Dual-Tone Multi-Frequency) lie à chaque chiffre un son composé de deux fréquences pures (Dual-Tone).

3 Comparer deux signaux

Pour comparer deux signaux, il est nécessaire qu'ils aient le même nombre d'échantillons.

3.1 L'erreur quadratique moyenne EQM (EN : Mean Square Error)

On définit **l'erreur quadratique** des signaux s_1 et s_2 comme la somme du carré la différence terme à terme entre les signaux s_1 et s_2 :

$$\mathbf{EQ}(s_1, s_2) = \sum_{k=0}^{N-1} (s_{1k} - s_{2k})^2$$

Attention, la somme va de 0 à $N - 1$

L'erreur quadratique moyenne est alors définie comme l'erreur quadratique divisée par le nombre d'échantillons :

$$\mathbf{EQM}(s_1, s_2) = \frac{1}{N} \mathbf{EQ}(s_1, s_2) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (s_{1k} - s_{2k})^2$$

Il s'agit de la moyenne du carré de la différence terme à terme entre les signaux s_1 et s_2 .

Pour des signaux acquis à partir d'un signal physique, l'erreur quadratique moyenne est moins sensible que l'erreur quadratique à une modification de l'échantillonnage des signaux s_1 et s_2 qui entraînerait une différence de nombre d'échantillons dans le signal.

L'erreur quadratique et l'erreur quadratique moyenne permettent de comparer deux signaux car :

- L'erreur quadratique et l'erreur quadratique moyenne sont **élevées** quand les signaux sont **différents** terme à terme.
- L'erreur quadratique et l'erreur quadratique moyenne sont **nulles** quand les signaux sont **égaux**.

L'erreur quadratique correspond de façon géométrique au carré de la longueur du vecteur différence entre s_1 et s_2 , comme représenté sur la figure 1.

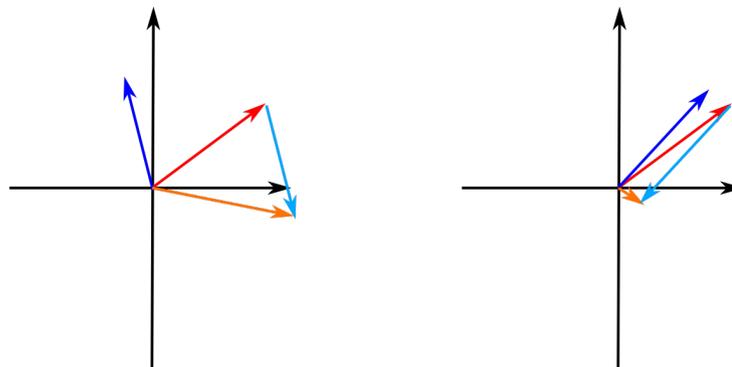


FIGURE 1 – Représentation géométrique de l'erreur quadratique pour des signaux ayant 2 échantillons réels. De gauche à droite, la ressemblance entre les signaux s_1 et s_2 augmente. On peut voir que la longueur du vecteur $s_1 - s_2$ diminue quand s_2 ressemble à s_1 . L'erreur quadratique diminue donc quand s_2 ressemble à s_1 . $\rightarrow s_1$, $\rightarrow s_2$, $\rightarrow -s_2$, $\rightarrow s_1 - s_2$.

Mettre chaque différence élémentaire au carré permet de s'assurer qu'une différence positive ne compensera pas une différence négative, et cela rend l'EQM toujours positive ou nulle. Contrairement à la fonction valeur absolue, mettre au carré permet d'obtenir une grandeur facilement dérivable, et donc de trouver des situations qui minimisent l'erreur quadratique moyenne.

En python, il est facile de coder l'EQM si l'on manipule des arrays de la bibliothèque numpy. La différence terme à terme s'écrit :

```
diff = numpy.subtract(s1, s2)
```

La mise au carré terme à terme peut se faire par la fonction `power`¹ :

```
difsquare = numpy.power(diff,2)
```

La somme de tous les éléments d'un array se fait par la fonction `sum` :

```
eq = numpy.sum(difsquare)
```

1. Ce qui est différent du calcul du carré de la matrice, qui est disponible dans le module `linalg` de numpy avec la fonction `numpy.linalg.matrix_power(A, n)`

Et la fonction shape permet d'obtenir la longueur du signal :

```
N = diffsquare.shape[0]
eqm = eq/N
```

3.2 Le produit scalaire (EN : dot product)

Le produit scalaire des signaux s_1 et s_2 est la somme du produit terme à terme des éléments des signaux s_1 et s_2 :

$$\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2 = \sum_{k=0}^{N-1} s_{1k} s_{2k}$$

Attention, la somme va de 0 à $N - 1$

Le produit scalaire peut être utilisé pour comparer deux signaux car :

- Le produit scalaire est **nul** quand les signaux sont **orthogonaux**, c'est à dire qu'ils ne se ressemblent pas.
- Le produit scalaire est **élevé** quand les signaux se **ressemblent**. C'est particulièrement le cas lorsque les signaux sont co-linéaires, c'est à dire que $\mathbf{s}_2 = \alpha \mathbf{s}_1$.

Géométriquement, le produit scalaire correspond à la projection d'un vecteur \mathbf{s}_2 sur le vecteur \mathbf{s}_1 et peut être facilement représenté pour des signaux de longueur deux (constitués de 2 échantillons), comme on peut le voir à la figure 2.

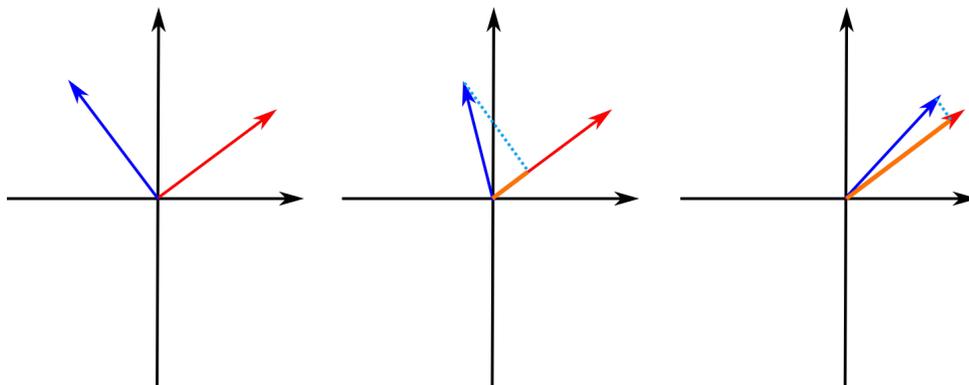


FIGURE 2 – Représentation géométrique du produit scalaire pour des signaux ayant 2 échantillons réels. De gauche à droite, la ressemblance entre les signaux \mathbf{s}_1 et \mathbf{s}_2 augmente. On peut voir que la projection de \mathbf{s}_2 sur \mathbf{s}_1 augmente quand \mathbf{s}_2 ressemble d'avantage à \mathbf{s}_1 . Le produit scalaire augmente donc avec la ressemblance de \mathbf{s}_2 et \mathbf{s}_1 . A gauche, \mathbf{s}_2 et \mathbf{s}_1 sont orthogonaux. Leur produit scalaire est nul. $\rightarrow \mathbf{s}_1$, $\rightarrow \mathbf{s}_2$ $-\cdot-$ direction de projection de \mathbf{s}_2 sur \mathbf{s}_1 , $-$ produit scalaire entre \mathbf{s}_1 et \mathbf{s}_2 .

Le produit scalaire peut aussi être représenté algébriquement par la multiplication matricielle du vecteur ligne \mathbf{s}_1 par le vecteur colonne \mathbf{s}_2 :

$$\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2 = [s_{10} \quad s_{11} \quad \dots \quad s_{1k} \quad \dots \quad s_{1N-1}] \begin{bmatrix} s_{20} \\ s_{21} \\ \dots \\ s_{2k} \\ \dots \\ s_{2N-1} \end{bmatrix}$$

Le produit scalaire a aussi les deux propriétés mathématiques suivantes :

- Le produit scalaire est commutatif : $s_1 \cdot s_2 = s_2 \cdot s_1$
- Le produit scalaire est une application linéaire : $s \cdot (s_1 + \lambda s_2) = s \cdot s_1 + \lambda (s \cdot s_2)$, avec λ un scalaire.

Pour des vecteurs contenant un faible nombre d'échantillons, vous devez être capable d'effectuer le produit scalaire à la main. Pour les vecteurs contenant un nombre élevé d'échantillons, on peut utiliser des fonctions de numpy. La fonction multiply permet de multiplier des vecteurs terme à terme :

```
mult = numpy.multiply(s1,s2)
```

Le produit scalaire peut alors s'écrire :

```
produitscalaire = numpy.sum(numpy.multiply(s1,s2))
```

Mais on peut aussi utiliser directement la fonction dot de numpy :

```
produitscalaire = numpy.dot(s1,s2)
```

3.3 Comparaison terme à terme

Pour les signaux ayant des échantillons dans des espaces de représentation qui n'ont pas de relation d'ordre ni de notion de distance, on ne peut que juger si les échantillons sont différents ou égaux. C'est le cas par exemple des signaux ayant leurs échantillons dans l'ensemble des lettres de l'alphabet. On ne peut pas dire qu'une lettre est plus similaire à une autre en particulier. Par exemple, on ne peut pas dire que la lettre 'a' est plus similaire à 'b' qu'à 'z'.

Différents choix de comparaison s'offrent à nous :

- Si au moins un échantillon du signal est différent, les signaux sont différents.
- On peut compter le nombre d'échantillons à la même place ayant la même valeur. On note ce nombre N_e . On peut alors donner un score de ressemblance étant : $\frac{N_e}{N}$

Il faut bien remarquer qu'en cas de changement d'espace de représentation, il est préférable de définir les nouveaux symboles de telle façon qu'on ne leur donne pas artificiellement de notion de ressemblance.

Dans le premier TP, lorsqu'on est passé de l'ensemble de représentation des notes de musiques a,b,c,d,e,f à un ensemble binaire, on a défini chaque symbole binaire $\mathbf{b}_a, \mathbf{b}_b, \mathbf{b}_c, \mathbf{b}_d$ tels qu'ils soient orthogonaux entre eux :

$$\mathbf{b}_a \cdot \mathbf{b}_b = 0, \mathbf{b}_a \cdot \mathbf{b}_c = 0, \mathbf{b}_a \cdot \mathbf{b}_d = 0, \mathbf{b}_b \cdot \mathbf{b}_c = 0, \mathbf{b}_b \cdot \mathbf{b}_d = 0, \mathbf{b}_c \cdot \mathbf{b}_d = 0$$

afin de ne pas créer de notion de ressemblance par produit scalaire entre des symboles qui n'en n'avaient pas dans leur espace d'origine.

Pour représenter de façon binaire un ensemble de N_Ω symboles, il faut au moins $\frac{\ln(N_\Omega)}{\ln(2)}$ symboles (arrondi au supérieur) où \ln est le logarithme népérien. Pour coder des ensembles de 3 à 4 symboles, des vecteurs de taille 2 sont suffisants. Pour coder des ensembles de 5 à 8 symboles tels que les 7 notes du TP1, des vecteurs de taille 3 sont nécessaires.

Cependant, pour obtenir un ensemble de N_Ω vecteurs de valeurs réelles qui soient tous orthogonaux entre eux, il est nécessaire que ces vecteurs soient au moins de taille N_Ω . Les vecteurs du DM1 sont donc de taille 8. Des vecteurs de taille 7 auraient pu suffire, si les symboles représentés étaient représentés de façon binaire avec des 0 et des 1, plutôt qu'avec des 1 et des -1.

4 Acquisition d'un signal physique

4.1 Signaux périodiques

Un signal périodique est un signal composé d'un sous-ensemble de valeurs qui se répètent. La période du signal correspond au plus petit nombre d'échantillons qui se répètent. Voici plusieurs exemples de signaux périodiques :

- $s = [alphabetalphabet]$ est un signal de longueur 16 présentant 2 périodes de 8 échantillons
- $s = [000111000111000111]$ est un signal de longueur 18 présentant 3 périodes de 6 échantillons
- $s = [0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1]$ est un signal de longueur 24 présentant 6 périodes de 4 échantillons.

4.2 Échantillonnage régulier

Toutes les notions que nous avons utilisées précédemment sont indépendantes du temps. Or de nombreux signaux ont été acquis par enregistrement de phénomènes physiques et ont donc une composante temporelle.

L'échantillonnage régulier correspond à enregistrer dans un signal discret des valeurs d'un signal continu, tel que le pas temporel entre les échantillons soit constant. On note le pas de temps entre deux échantillons δt . Pour un signal de durée T et de nombre d'échantillons N , on a alors :

$$T = N\delta t$$

La fréquence d'échantillonnage correspond au nombre d'échantillons enregistrés par unité de temps :

$$f_{\text{ech}} = \frac{N}{T} \quad (1)$$

La fréquence d'échantillonnage s'exprime en Hertz (Hz). On peut aussi la calculer à partir de δt :

$$f_{\text{ech}} = \frac{1}{\delta t}$$

Avec cette définition, un vecteur qui contient les instants de l'échantillonnage :

$$\mathbf{t} = [t_0, t_1, \dots, t_{N_{\text{ech}}-1}]$$

s'écrit en fonction de t_0 , l'instant du premier échantillon et δt , le pas d'échantillonnage, de la façon suivante :

$$\mathbf{t} = [t_0, t_0 + \delta t, t_0 + 2\delta t, \dots, t_0 + (N_{\text{ech}} - 1)\delta t]$$

Pour obtenir la durée d'un signal, il faut donc utiliser la formule suivante :

$$T = t_{N_{\text{ech}}} - t_0 + \delta t$$

où t_0 est la première valeur du vecteur temps et $t_{N_{\text{ech}}}$ est la dernière valeur du vecteur temps. Ce choix de convention est illustré à la figure 3.

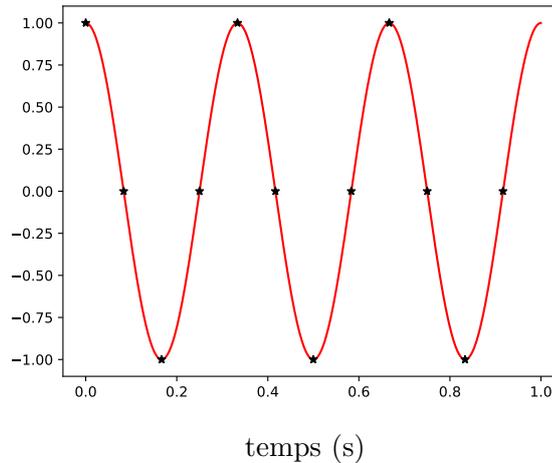


FIGURE 3 – Illustration de l’hypothèse sur l’échantillonnage. Le signal a été échantillonné avec $f_{ech} = 12$ Hz. Il y a donc 12 points d’échantillonnage (les étoiles). La durée du signal est de 1 seconde. On peut voir qu’il y a un point d’échantillonnage pour $t=0s$ mais pas pour $t=1s$.

4.3 Les signaux mono-fréquentiels continus

Les signaux mono-fréquentiels sont un sous-groupe des signaux périodiques, où le motif périodique est une *oscillation*. On peut les décrire par des fonctions trigonométriques sinus et cosinus.

Dans leur version continue, nous avons choisi de considérer des cosinus. Ces signaux s’écrivent donc :

$$s(t) = \cos(2\pi f t + \phi_0)$$

On peut aussi les écrire avec des fonctions sinus. Et si $\phi_0 = \frac{\pi}{2}$, on obtient :

$$s(t) = \cos(2\pi f t + \frac{\pi}{2}) = \sin(2\pi f t)$$

La fréquence f correspond au nombre d’oscillations du signal pendant une durée de 1 seconde. Des signaux mono-fréquentiels sont représentés à la figure 6. Vous devez être capable de retrouver la fréquence d’un signal à partir de sa représentation graphique.

Connaissant la durée du signal T , on peut donc obtenir la fréquence en comptant le nombre d’oscillations M_o :

$$f = \frac{M_o}{T}$$

La période du signal, c’est à dire la durée du plus petit motif qui se répète, soit la durée d’une oscillation, s’écrit alors :

$$T_o = \frac{T}{M_o} = \frac{1}{f}$$

On peut alors écrire la définition d’un signal périodique :

$$s(t + T_o) = s(t)$$

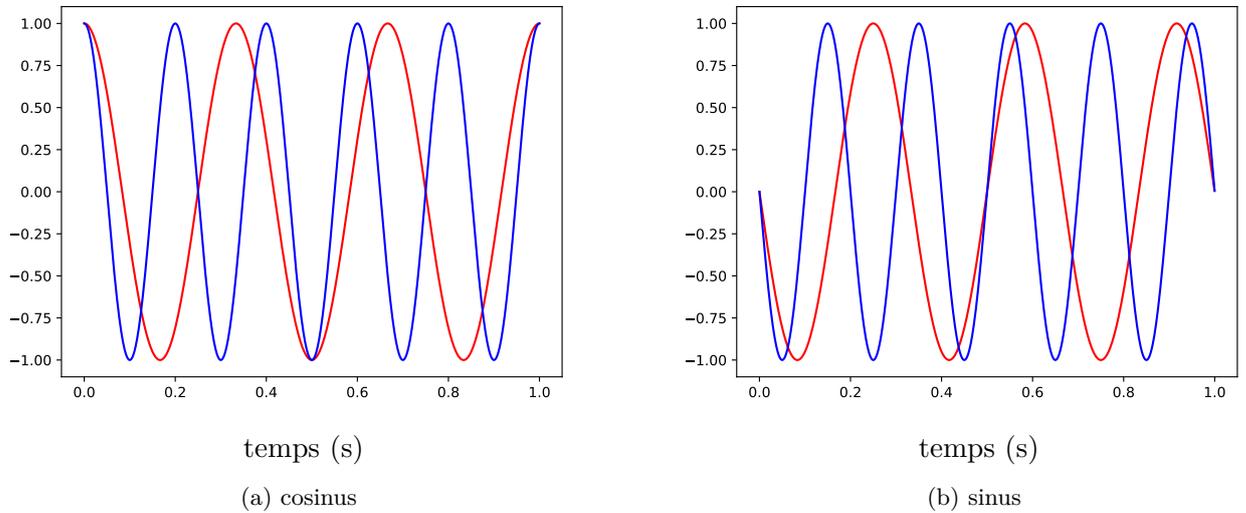


FIGURE 4 – Signaux mono-fréquentiels continus ayant une fréquence de 3Hz (3 oscillations par seconde) – 5Hz (5 oscillations par seconde). La figure de gauche les représente sous forme de cosinus. La figure de droite les représente sous forme de sinus (déphasage de $\frac{\pi}{2}$ par rapport au cosinus).

4.4 Les signaux mono-fréquentiels discrets

Un signal discret \mathbf{s} est un vecteur, c'est à dire un groupe de valeurs prises dans un ordre donné. Les valeurs de ce signal sont appelées des échantillons. Un signal contenant N échantillons est dit de longueur N ou de taille N . Mathématiquement, un signal s'écrit donc :

$$\mathbf{s} = [s_0, s_1, \dots, s_k, \dots, s_{N-1}]$$

Le $k^{\text{ème}}$ échantillon d'un signal mono-fréquentiel discret de N échantillons comptant M_o oscillations, peut s'écrire sous la forme :

$$s_k = \cos(2\pi M_o \frac{k}{N} + \phi_0)$$

si l'indice k varie de 0 à $N - 1$. Ce même signal s'écrit en python :

```
Nosci = ... # le nombre d'oscillations
Nech = .. # le nombre d'échantillons
phi0 = ... # la phase à l'origine
k = numpy.arange(Nech)
signal = numpy.cos(2*numpy.pi*Nosci*k/Nech + phi0)
```

où l'array k varie de 0 à $N - 1$.

On voit que notre signal discret est paramétré par le nombre d'oscillations, plutôt que par une fréquence physique en Hz (c'est à dire en s^{-1}). Pour obtenir une fréquence, il faut ajouter à ce signal un paramètre physique : soit la durée du signal T , soit le pas d'échantillonnage δt . On obtient la fréquence par la formule suivante :

$$f = \frac{M_o}{T} = \frac{M_o}{N\delta t} \quad (2)$$

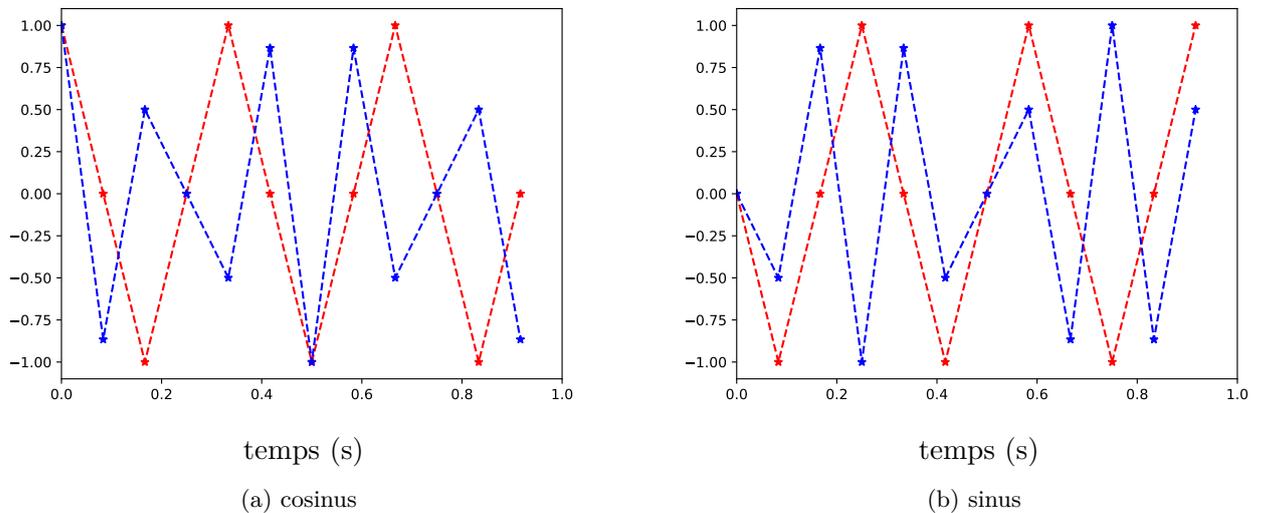


FIGURE 5 – Signaux mono-fréquentiels discrets ayant une fréquence de 3Hz (3 oscillations par seconde) – 5Hz (5 oscillations par seconde). La figure de gauche les représente sous forme de cosinus. Le signal de 3Hz présente 6 passages par 0 et le signal de 5Hz présente 9 passages à 0. La figure de droite les représente sous forme de sinus (déphasage de $\frac{\pi}{2}$ par rapport au cosinus). Le signal de 3Hz présente 6 passages par 0 et le signal de 5Hz présente 10 passages à 0.

Le nombre d'échantillons correspondant à une oscillation N_o s'obtient avec la formule suivante :

$$N_o = \frac{N}{M_o} = \frac{N}{T} \frac{T}{M_o} = \frac{f_{ech}}{f}$$

Des signaux mono-fréquentiels d'une durée d'une seconde, échantillonnés avec 12 points, sont représentés à la figure 5. Ces signaux ont les mêmes fréquences que ceux représentés à la figure 6. Vous devez être capable de compter le nombre d'oscillations d'un signal discret. Pour ce faire, il faut compter le nombre de fois que le signal en pointillé passe par 0, et diviser ce nombre par 2 en arrondissant au supérieur.

4.5 La décimation

La décimation d'un signal consiste réduire la taille d'un signal en gardant de façon régulière des échantillons :

- Une décimation d'un facteur 2 consiste à garder 1 échantillon sur 2
- Une décimation d'un facteur 3 consiste à garder 1 échantillon sur 3
- Une décimation d'un facteur 4 consiste à garder 1 échantillon sur 4

La décimation ne change pas la durée d'un signal. La décimation d'un signal est illustrée à la figure 7

Il s'agit d'une première forme de sous-échantillonnage. Soit ρ_d le facteur de décimation, le pas d'échantillonnage après décimation dt_d s'écrit :

$$dt_d = \rho_d \delta t$$

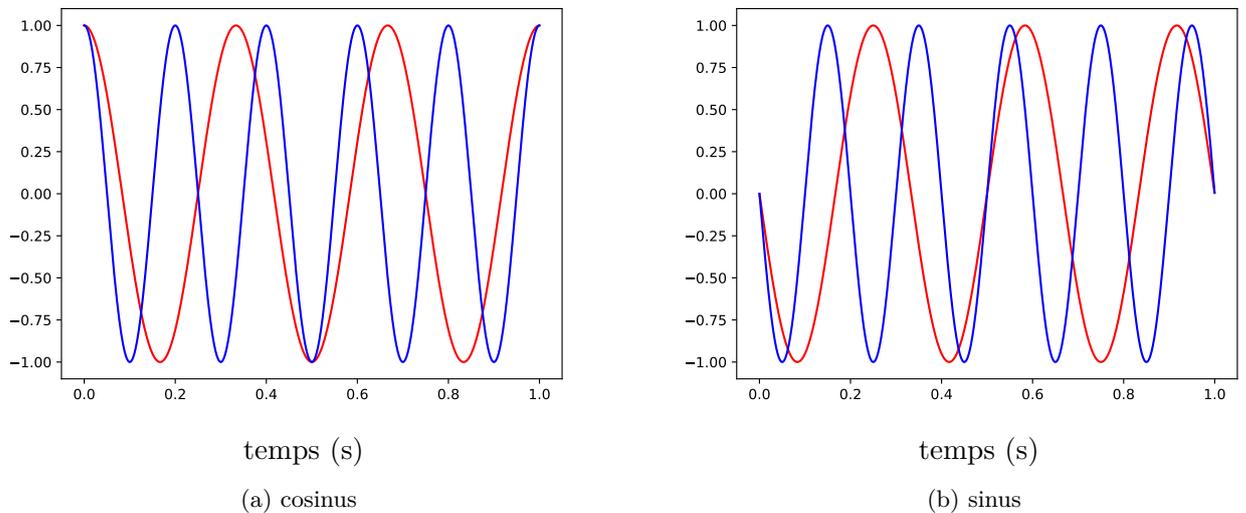


FIGURE 6 – Signaux mono-fréquentiels continus ayant une fréquence de 3Hz (3 oscillations par seconde) – 5Hz (5 oscillations par seconde). La figure de gauche les représente sous forme de cosinus. La figure de droite les représente sous forme de sinus (déphasage de $\frac{\pi}{2}$ par rapport au cosinus).

On a donc la fréquence d'échantillonnage après décimation $f_{\text{ech},d}$ qui devient :

$$f_{\text{ech},d} = \frac{1}{dt_d} = \frac{1}{\rho_d} \frac{1}{\delta t} = \frac{f_{\text{ech}}}{\rho_d}$$

La fréquence d'échantillonnage diminue avec la décimation : on a moins d'échantillons pour la même durée.

4.6 Le théorème de Shannon (EN : Nyquist-Shannon sampling theorem)

Le théorème de Shannon répond à la question suivante : lors de l'échantillonnage, c'est à dire la conversion analogique-numérique, combien de points sont ils nécessaires pour pouvoir retrouver le signal lors de la conversion numérique analogique.

Ce théorème nous dit que pour conserver l'information contenue dans un signal, la fréquence d'échantillonnage doit être choisie en fonction de la fréquence la plus élevée du signal f_{max} selon la formule :

$$f_{\text{ech}} \geq 2f_{\text{max}}$$

Ce qui veut dire qu'il faut 2 points par oscillations pour pouvoir reconstruire une sinusoïde pure. Comme précisé à la section 4.4, pour retrouver la fréquence à l'aide du tracé du signal discret, on doit compter le nombre de passages à 0 car chaque oscillation présente 2 passages à 0.

Or pour voir le passage par 0 d'une oscillation, il faut au moins 2 points : un point supérieur à zéro et l'autre inférieur à 0. En reliant le point inférieur à zéro d'une oscillation avec le point supérieur à 0 de l'oscillation suivante, on peut retrouver le 2ème passage à zéros de notre oscillation.

Ce théorème peut s'illustrer par son cas limite où la valeur supérieure à 0 est 1 ($\cos(0)$) et la valeur inférieure à 0 est -1 ($\cos(\pi)$), comme illustré à la figure 8.

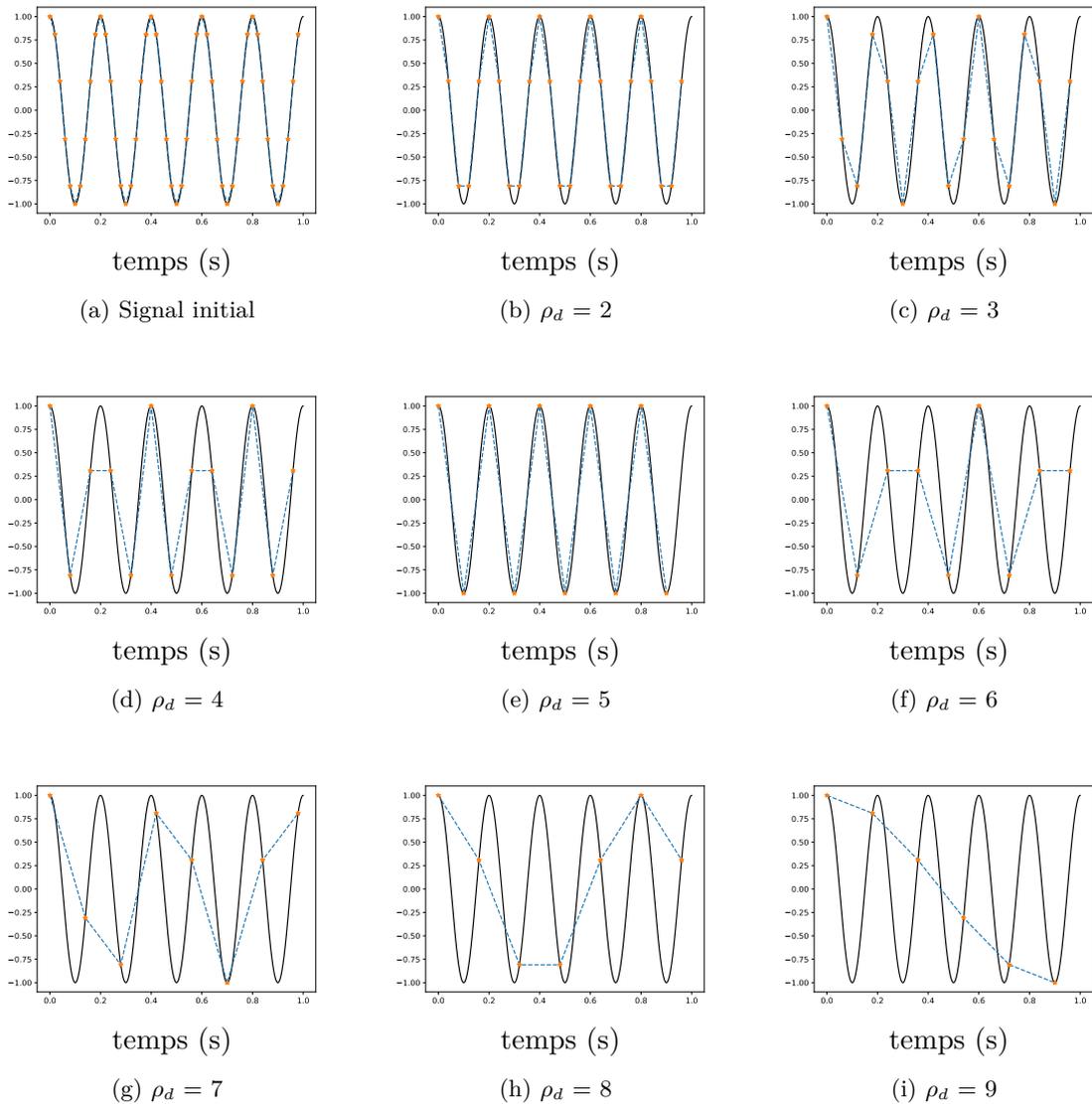


FIGURE 7 – Décimation d’un signal. Le signal continu est représenté en noir. C’est un signal mono-fréquentiel de fréquence 10Hz (10 oscillations par seconde). L’échantillonnage initial est de 50Hz (50 points par seconde). Les étoiles oranges représentent le signal échantillonné après décimation d’un facteur ρ_d . Après décimation d’un facteur $\rho_d = 9$, il n’y a plus que 6 points dans le signal échantillonné.

Mais le théorème de Shannon apporte aussi la réponse à la question : "si je n’ai pas mis assez de points lors de la conversion analogique numérique, quelle sera la fréquence que je reconstruirais lors de la conversion numérique analogique?".

Si le théorème de Shannon n’est pas respecté et que la fréquence f du signal est supérieure à $\frac{f_{ech}}{2}$, la fréquence perçue du signal f' sera inférieure à $\frac{f_{ech}}{2}$ et égale à :

$$f' = \frac{f_{ech}}{2} - (f - \frac{f_{ech}}{2}) = f_{ech} - f \quad (3)$$

C’est à dire que la distance entre f et $\frac{f_{ech}}{2}$ est la même qu’entre f' et $\frac{f_{ech}}{2}$. Cette propriété n’est pas démontrée dans ce cours mais est schématisée à la figure 12 sous le surnom "le mur de Shannon". On

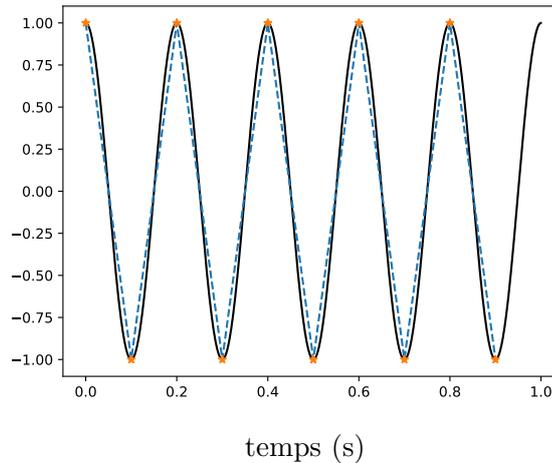


FIGURE 8 – Le signal mono-fréquentiel de fréquence la plus élevée pouvant être enregistré avec la fréquence d'échantillonnage $f_{ech} = 10\text{Hz}$. Il s'agit du signal mono-fréquentiel de fréquence 5Hz. On peut voir que les seules valeurs du signal échantillonné sont -1 et 1.

parle aussi de repliement pour le phénomène : lorsqu'une fréquence dépasse la limite de $\frac{f_{ech}}{2}$, on dit qu'elle se replie.

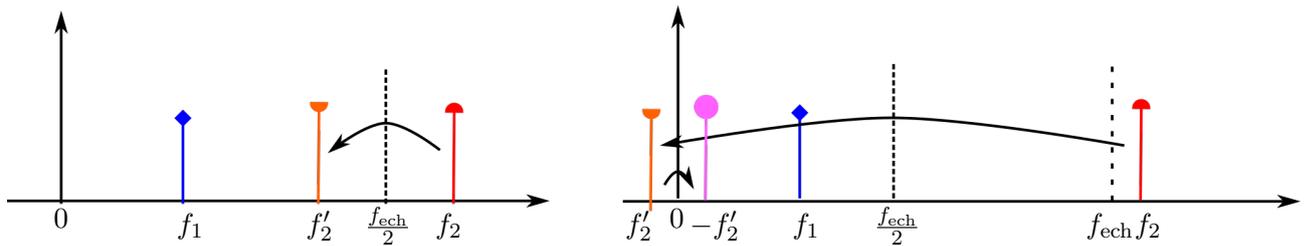


FIGURE 9 – Schéma représentant le "mur de Shannon". Dans le cas à gauche, la fréquence f_1 est inférieure à $\frac{f_{ech}}{2}$, et est bien échantillonnée. f_2 est supérieure à $\frac{f_{ech}}{2}$ et se replie à f'_2 . Dans le cas de droite, la fréquence f_1 est inférieure à $\frac{f_{ech}}{2}$, et est bien échantillonnée. f_2 est supérieure à f_{ech} et viendra donc se replier à f'_2 . Or f'_2 est inférieure à 0, la fréquence perçue sera donc $-f'_2$.

L'effet du mur de Shannon a aussi été illustré à la figure 7. Lorsque la fréquence du signal était supérieure à $\frac{f_{ech,d}}{2}$ après décimation, on ne retrouve plus le signal avec la fréquence d'origine, mais un signal avec un fréquence moindre. C'est le cas pour les figures de 7(f) à 7(i). De plus, la fréquence perçue diminue avec la décimation, à mesure que la fréquence initiale f s'éloigne de $\frac{f_{ech,d}}{2}$.

5 Estimer la fréquence d'un signal

5.1 Le produit scalaire de deux signaux mono-fréquentiels

Soit s_1 et s_2 deux signaux mono-fréquentiels discrets non déphasés, de même durée et de même nombre d'échantillons avec $s_{1k} = \cos(2\pi M_{o1} \frac{k}{N})$ et $s_{2k} = \cos(2\pi M_{o2} \frac{k}{N})$. Leur produit scalaire s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2 &= \sum_{k=0}^{N-1} \cos(2\pi M_{o1} \frac{k}{N}) \cos(2\pi M_{o2} \frac{k}{N}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \cos(2\pi (M_{o1} + M_{o2}) \frac{k}{N}) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \cos(2\pi (M_{o1} - M_{o2}) \frac{k}{N}) \end{aligned} \quad (4)$$

Car l'on sait (et vous devez pouvoir le retrouver) que $\cos(a) \cos(b) = \frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2}$

On sait par ailleurs que $\sum_{k=0}^{N-1} \cos(2\pi M_o \frac{k-1}{N}) \approx 0$ si $M_o \neq 0$ (on peut le retrouver en se disant qu'à chaque échantillon positif correspond un échantillon négatif de même valeur absolue et qu'ils vont donc s'annuler).

On a donc que le produit scalaire de deux signaux mono-fréquentiels discrets, de même durée et de même nombre d'échantillon :

- Vaut 0 si $M_{o1} \neq M_{o2}$
- Vaut $\frac{N}{2}$ si $M_{o1} = M_{o2} \neq 0$
- Vaut N si $M_{o1} = M_{o2} = 0$

Si les signaux présentent une différence de phase de $\Delta\phi$, leurs échantillons peuvent s'écrire $s_{1k} = \cos(2\pi M_{o1} \frac{k}{N} + \phi_0)$ et $s_{2k} = \cos(2\pi M_{o2} \frac{k}{N} + \phi_0 + \Delta\phi)$.

Leur produit scalaire devient :

$$\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2 = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \cos(2\pi (M_{o1} + M_{o2}) \frac{k}{N} + 2\phi_0 + \Delta\phi) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \cos(2\pi (M_{o1} - M_{o2}) \frac{k}{N} + \Delta\phi)$$

Leur produit scalaire vaudra alors :

- Vaut 0 si $M_{o1} \neq M_{o2}$
- Vaut $\frac{N}{2} \cos(\Delta\phi)$ si $M_{o1} = M_{o2} \neq 0$
- Vaut $N \cos(\phi_0) \cos(\phi_0 + \Delta\phi)$ si $M_{o1} = M_{o2} = 0$

Si $\Delta\phi = \frac{\pi}{2}$, leur produit scalaire sera nul, même si $M_{o1} = M_{o2}$.

5.2 Transformée de Fourier discrète

La section 5.1 montre que pour des signaux ne présentant pas de déphasage, le produit scalaire est un bon moyen pour estimer la fréquence d'un signal : pour estimer la fréquence inconnue, il suffit d'effectuer le produit scalaire entre le signal de fréquence inconnue et un ensemble de signaux ayant une fréquence connue. Le produit scalaire sera élevé lorsque le signal connu aura la même fréquence que le signal inconnu. Dans les autres cas, le produit scalaire sera faible.

Si le signal présente un déphasage, le test devient plus complexe. Pour estimer la fréquence d'un signal, on peut tester toutes les fréquences possibles avec tous les déphasages possibles, le produit scalaire ne sera élevé que pour le signal ayant la bonne fréquence et le bon déphasage.

Mais on peut aussi se souvenir d'une autre formule trigonométrique : $\cos(a)\sin(b) = \frac{\sin(a+b)+\sin(a-b)}{2}$. En faisant le produit scalaire entre notre signal inconnu de fréquence M_{o1} et un sinus de fréquence connue M_{o2} , on obtient :

- Vaut 0 si $M_{o1} \neq M_{o2}$
- Vaut $\frac{N}{2} \sin(\Delta\phi)$ si $M_{o1} = M_{o2} \neq 0$
- Vaut 0 si $M_{o1} = M_{o2} = 0$

La transformée de Fourier discrète (TFD, EN : Discrete Fourier Transform ou DFT) exploite cette propriété pour l'estimation de la fréquence d'un signal. Son principe est de faire le produit scalaire entre un signal inconnu s et un signal complexe qui a pour partie réelle un cosinus de nombre d'oscillation M_o et pour partie imaginaire un sinus de nombre d'échantillon M_o : $\cos(2\pi f \frac{k}{N}) + j \sin(2\pi f \frac{k}{N})$, avec $j = \sqrt{-1}$ le nombre complexe. La transformée de Fourier discrète est donc un nombre complexe. Comme le produit scalaire est linéaire, la TFD revient à faire un produit scalaire avec un cosinus de nombre d'oscillation M_o et un produit scalaire avec un sinus de nombre d'oscillation M_o :

$$\text{TFD}(s, M_o) = \sum_{k=0}^{N-1} \cos(2\pi M_o \frac{k}{N}) s_k + j \sum_{k=0}^{N-1} \sin(2\pi M_o \frac{k}{N}) s_k \quad M_o \in \mathbb{N} \quad (5)$$

Si s est un signal monofréquentiel, $\text{TFD}(s, M_o)$:

- Vaut 0 si le nombre d'oscillation inconnu n'est pas M_o
- Vaut $\frac{N}{2} \cos(\Delta\phi) + j \frac{N}{2} \sin(\Delta\phi)$ si le nombre d'oscillation inconnu est $M_o \neq 0$. Son module vaut alors $|\text{TFD}(s, M_o)| = \sqrt{(\frac{N}{2} \cos(\Delta\phi))^2 + (\frac{N}{2} \sin(\Delta\phi))^2} = \frac{N}{2}$ et sa phase vaut $\angle \text{TFD}(s, M_o) = \arctan(\frac{\sin(\Delta\phi)}{\cos(\Delta\phi)}) = \arctan(\tan(\Delta\phi)) = \Delta\phi$
- Vaut $N = \sqrt{N^2 + 0^2}$ si le nombre d'oscillation inconnu est $M_o = 0$

La transformée de Fourier discrète a un module élevé si le nombre d'onde inconnu du signal mono-fréquentiel s est M_o et un module très faible sinon : Il s'agit donc d'un moyen d'estimer le nombre d'oscillations du signal s sans devoir tenir compte de son déphasage. Pour estimer la fréquence d'un signal à partir du nombre d'oscillations, il est nécessaire de connaître la durée T du signal, comme le montre l'équation 2.

5.3 Le spectre d'un signal

Le spectre \mathbf{S} d'un signal s est un vecteur dont chacune des composantes S_{M_o} est égale à la TFD pour le nombre d'oscillation correspondant :

$$S_{M_o} = \text{TFD}(s, M_o) \quad M_o \in [-\left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor - 1] \quad (6)$$

Le vecteur \mathbf{S} est un vecteur complexe de taille N . La formule du spectre peut aussi s'exprimer en terme de fréquence. Pour cela, il faut se rappeler l'équation 2 : $f = \frac{M_o}{T}$ où T est la durée du signal, et de l'équation 1 : $f_{\text{ech}} = \frac{N}{T}$. On obtient donc l'équation suivante :

$$S_{f_m} = \text{TFD}(s, f_m) \quad f_m \in [-\left\lfloor \frac{f_{\text{ech}}}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{f_{\text{ech}}}{2} \right\rfloor - 1] \quad (7)$$

Dans la définition du spectre faite à l'équation (6), trois propriétés, représentées sur la figure 10, ont été introduites :

- Le spectre est discret

- Le spectre est de longueur N , il compte autant d'échantillons que le signal
- On peut choisir les bornes du spectre $-\lfloor \frac{N}{2} \rfloor$ à $\lceil \frac{N}{2} \rceil - 1$, mais comme nous le verrons par la suite, d'autres bornes sont possibles.

Un spectre *discret*, par opposition à continu, veut dire qu'on ne peut avoir les valeurs du spectre que sur un nombre fini de points, qui sont ici les nombres d'oscillation M_o . Le spectre n'est pas défini entre M_o et $M_o + 1$ mais uniquement pour les valeurs M_o et $M_o + 1$. Cette propriété est due au fait que les signaux que l'on manipule ont une durée T finie, et que l'on fait implicitement l'hypothèse, en utilisant la TFD que ces signaux sont périodiques. C'est une hypothèse importante mais qui ne sera pas détaillée dans ce cours. Or, seuls les signaux mono-fréquentiels comptant un nombre entier d'oscillations sur la durée T du signal sont périodiques. La TFD n'aura donc de valeurs que pour les nombres d'oscillations entiers.

La propriété liée à la longueur du spectre est issue de la *périodicité* de la TFD. Puisque le cosinus discret de M_o oscillations et le sinus discret de M_o oscillations sont des signaux périodique ayant une période de taille N échantillons, la TFD est périodique avec une période de taille N , c'est à dire que :

$$\begin{aligned}
 \text{TFD}(s, M_o + N) &= \sum_{k=0}^{N-1} \cos(2\pi (M_o + N) \frac{k}{N}) s_k + j \sum_{k=0}^{N-1} \sin(2\pi (M_o + N) \frac{k}{N}) s_k \\
 &= \sum_{k=0}^{N-1} \cos(2\pi M_o \frac{k}{N} + 2\pi k \frac{N}{N}) s_k + j \sum_{k=0}^{N-1} \sin(2\pi M_o \frac{k}{N} + 2\pi k \frac{N}{N}) s_k \\
 &= \sum_{k=0}^{N-1} \cos(2\pi M_o \frac{k}{N}) s_k + j \sum_{k=0}^{N-1} \sin(2\pi M_o \frac{k}{N}) s_k \\
 &= \text{TFD}(s, M_o)
 \end{aligned} \tag{8}$$

Enfin, le choix des bornes du spectre est dû à la propriété de *symétrie* hermitienne du spectre. Dans le cas des signaux réels, le spectre est hermitien, c'est à dire que le composant du spectre correspondant à $-M_o$ oscillations est le conjugué² du composant du spectre correspondant à M_o oscillations. Cette propriété peut-être démontrée par le fait que le cosinus est une fonction paire alors que le sinus est une fonction impaire.

$$\begin{aligned}
 S_{-M_o} &= \text{TFD}(s, -M_o) \\
 &= \sum_{k=0}^{N-1} \cos(2\pi (-M_o) \frac{k}{N}) s_k + j \sum_{k=0}^{N-1} \sin(2\pi (-M_o) \frac{k}{N}) s_k \\
 &= \sum_{k=0}^{N-1} \cos(2\pi (M_o) \frac{k}{N}) s_k - j \sum_{k=0}^{N-1} \sin(2\pi (M_o) \frac{k}{N}) s_k \\
 &= S_{M_o}^*
 \end{aligned} \tag{9}$$

Cette propriété peut se traduire par le fait le module de la TFD est pair, alors que l'argument de la TFD est impair.

La figure 11 représente le spectre du signal téléphone que vous avez écouté en cours. Ce signal est composé de 7 fréquences distinctes. Deux représentations du spectre, avec l'axe des abscisses allant de 0 et $\frac{f_{\text{ech}}}{2}$ et de 0 et f_{ech} sont représentées. La propriété de symétrie peut être observées lorsque les fréquences de 0 et f_{ech} sont représentées.

2. Le conjugué du nombre complexe $z = a + jb$ est le nombre $z^* = a - jb$

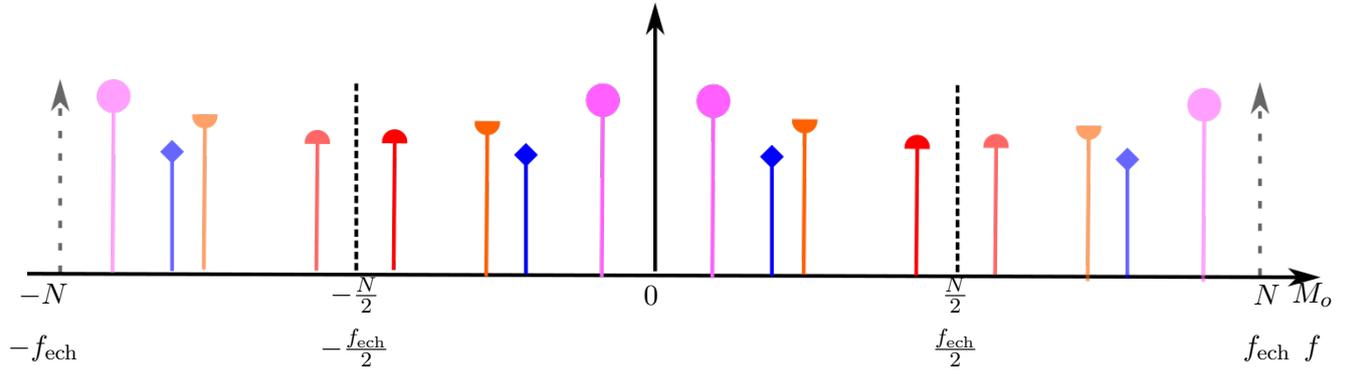


FIGURE 10 – Schéma représentant le module du spectre d'un signal composé de 4 signaux mono-fréquentiels tels que : $M_{o\blacksquare} < M_{o\blacklozenge} < M_{o\blacktriangle} < M_{o\blacktriangledown}$. L'axe des abscisses de ce schéma peut se lire de deux façons : soit en considérant M_o , le nombre d'oscillations contenues dans le signal, soit en considérant les fréquences $f = \frac{N_{osci}}{T}$ qui correspondent au nombre d'oscillations par seconde contenues dans le signal.

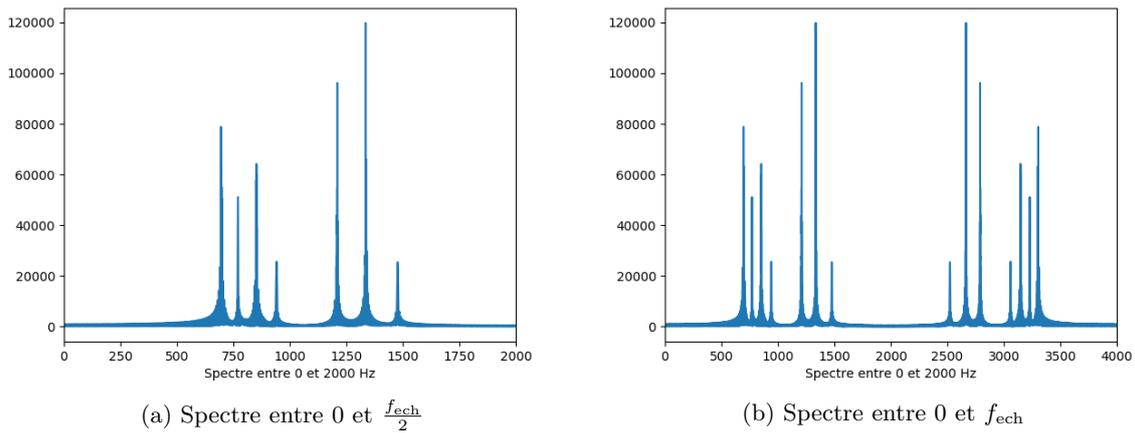


FIGURE 11 – Spectre du signal téléphone qui contient 7 fréquences. La symétrie du spectre s'observe lorsque l'ensemble du spectre (entre 0 et f_{ech}) est représenté.

Ces trois propriétés nous permettent d'éclairer le théorème de Shannon (présenté à la section 4.6). Calculons la TFD pour un nombre d'oscillation $\frac{N}{2} + M_o$:

$$\begin{aligned}
 \text{TFD}(s, \frac{N}{2} + M_o) &= \text{TFD}(s, \frac{N}{2} + M_o - N) \\
 &= \text{TFD}(s, M_o - \frac{N}{2}) \\
 &= \text{TFD}(s, -(\frac{N}{2} - M_o)) \\
 &= \text{TFD}^*(s, (\frac{N}{2} - M_o))
 \end{aligned} \tag{10}$$

On voit donc que si l'on dépasse le "mur de Shannon" de la valeur M_o , on rebondit sur ce mur et la fréquence perçue est $\frac{N}{2} - M_o$ comme présenté à la figure 12.

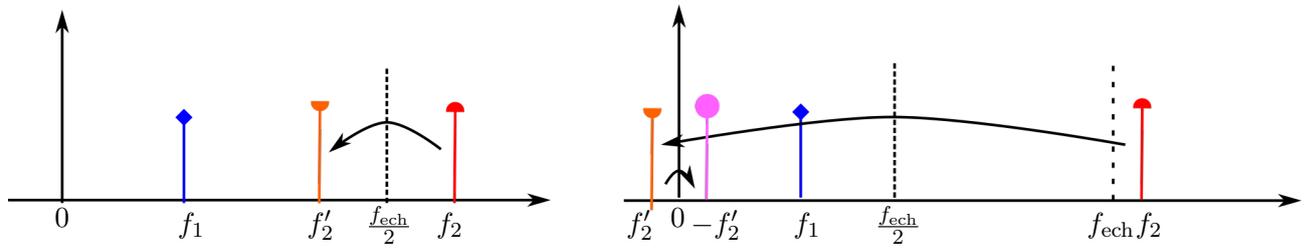


FIGURE 12 – Schéma représentant le "mur de Shannon". Dans le cas à gauche, la fréquence f_1 est inférieure à $\frac{f_{ech}}{2}$, et est bien échantillonnée. f_2 est supérieure à $\frac{f_{ech}}{2}$ et se replie à f'_2 . Dans le cas de droite, la fréquence f_1 est inférieure à $\frac{f_{ech}}{2}$, et est bien échantillonnée. f_2 est supérieure à f_{ech} et viendra donc se replier à f'_2 . Or f'_2 est inférieure à 0, la fréquence perçue sera donc $-f'_2$.

5.4 Précision temporelle VS précision fréquentielle

Considérons deux signaux s_1 et s_2 de même fréquence d'échantillonnage f_{ech} . Le signal s_1 contient 8 points, alors que le signal s_2 contient 4 points. Le signal s_1 est donc deux fois plus long (en nombre de points mais aussi en seconde) que le signal s_2 . Pour trouver la fréquence inconnue du signal s_1 de 8 points, on peut tester des signaux à 0, 1, 2, 3 et 4 oscillations. Pour trouver la fréquence inconnue du signal s_2 , qui ne contient que 4 points, on peut tester des signaux ayant 0, 1 et 2 oscillations. Comme les signaux ont la même fréquence d'échantillonnage, la fréquence de 2 oscillations pour le signal s_2 correspond à la même fréquence physique (nombre d'oscillations par seconde) que la fréquence à 4 oscillations pour le signal s_1 : c'est la fréquence $\frac{f_{ech}}{2}$. Et la fréquence à 1 oscillation du signal s_2 correspond à la fréquence à 2 oscillations du signal s_1 . Dans le signal s_2 , on ne peut pas estimer les fréquences qui correspondent à 1 ou 3 oscillations du signal s_1 car ces fréquences ne correspondent pas à des nombres d'oscillations entiers pour ce signal. Cet exemple, illustré à la figure 13, montre que la diversité de fréquences qui peuvent être représentées dans le spectre d'un signal dépend directement de la longueur du signal.

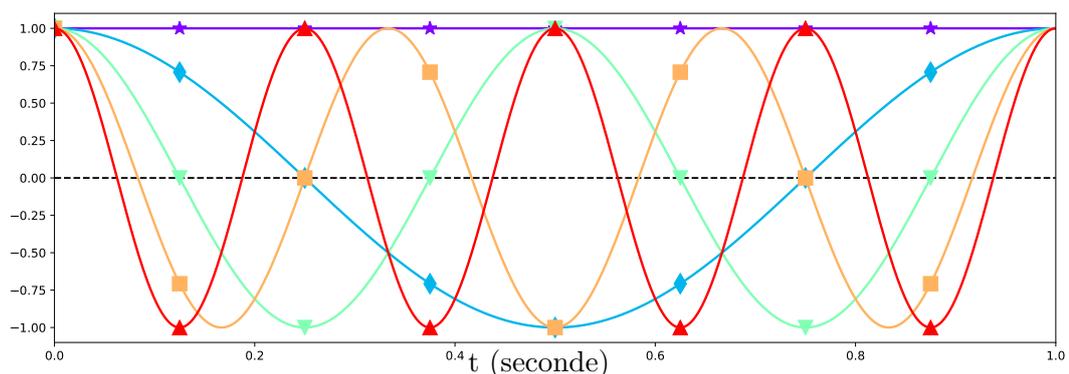


FIGURE 13 – Pour une durée de signal de 1s, soit 8 échantillons : $M_{o\star} = 0$, $M_{o\blacklozenge} = 1$, $M_{o\blacktriangledown} = 2$, $M_{o\blacksquare} = 3$, $M_{o\blacktriangle} = 4$. Pour une durée de signal de 0.5s soit, 4 échantillons : $M_{o\star} = 0$, $M_{o\blacktriangledown} = 1$, $M_{o\blacktriangle} = 2$. Les signaux s_{\blacklozenge} et s_{\blacksquare} ne correspondent plus à des nombres d'oscillation entiers

Comme le spectre d'un signal discret est donc aussi signal discret, on peut calculer l'écart entre deux

fréquences successives de la manière suivante :

$$\delta f = f_{m+1} - f_m = \frac{M_o + 1}{T} - \frac{M_o}{T} = \frac{1}{T}$$

Ce résultat peut aussi se retrouver en sachant que le spectre contient N fréquences réparties sur l'intervalle $[0, f_{ech}]$. On a donc $N\delta f = f_{ech}$, soit

$$\delta f = \frac{f_{ech}}{N} = \frac{1}{T}$$

Pour estimer une fréquence nous sommes donc face à un paradigme :

- On a une bonne précision fréquentielle lorsqu'on a une mauvaise précision temporelle, c'est à dire lorsque l'on fait l'analyse fréquentielle sur un signal long,
- On a une mauvaise précision fréquentielle lorsqu'on a une bonne précision temporelle, c'est à dire lorsque l'on fait l'analyse fréquentielle sur un signal court.

5.5 Le spectrogramme

Aux sections 5.2 et 5.3, nous avons montré comment estimer la fréquence inconnue d'un signal avec la transformée de Fourier. Si le signal s est de fréquence inconnue f_1 pendant toute la durée du signal échantillonné de longueur N points, le module de la TFD(s, f_1) = $\frac{N}{2}$ si $f_1 \neq 0$ et TFD(s, f_1) = N si $f_1 = 0$.

Dans cette section nous considérons des signaux changeant de fréquences pendant leur durée, tel que le signal "téléphone" de la 3ème séance de l'UE Transmission, mais l'instant où ces signaux changent de fréquence est inconnu.

Pour savoir quelles fréquences composent le signaux et quand sont ses fréquences dans le signal, la technique employée reste la même que pour la "chanson" dans le TP3 de l'UE Transmission : découper les signaux en signaux plus petit. Chacun de ces sous-signaux sera appelé une fenêtre d'analyse et la longueur (en nombre d'échantillon) est notée N_a . Seulement, comme l'instant où ces signaux changent de fréquence est inconnu, les signaux ne peuvent pas être découpés intelligemment, mais doivent être découpés de façon standard. Ce principe est illustré à la figure 14. La question qui se pose alors est celle de la durée des fenêtres car comme on l'a vu à la section 5.4, si l'on veut conserver une bonne précision fréquentielle, on ne peut pas prendre des sous-signaux trop courts.

Si l'on veut améliorer la précision temporelle en gardant une longueur d'analyse donnée, on introduit un recouvrement entre les différentes fenêtres d'analyse. La figure 15 illustre ce principe pour un recouvrement de la moitié de la taille de la fenêtre d'analyse.

Lorsque le nombre de fenêtre devient important, utiliser une représentation par superposition des spectres comme présentée aux figures 14 et 15, n'est plus adéquate. Le spectrogramme se présente alors comme une matrice où chaque colonne représente le spectre d'une fenêtre d'analyse donnée. Le nombre de lignes de cette matrice est alors $\frac{N_a}{2}$ lorsque uniquement les fréquences comprises entre 0 et $\frac{f_{ech}}{2}$ sont représentées, ou de taille N_a lorsque l'ensemble les fréquences, comprises entre 0 et f_{ech} sont représentées.

Le nombre de colonne M_a correspond au nombre de fenêtres d'analyse. Lorsqu'il n'y a pas de recouvrement, $M_a = \left\lfloor \frac{N}{N_a} \right\rfloor$, arrondi à l'entier inférieur. Cet arrondi signifie qu'on n'analyse pas les derniers échantillons si leur nombre est inférieur à la taille de la fenêtre d'analyse. Lorsqu'il y a un recouvrement de taille N_r , le nombre de colonnes $M_a = 1 + \left\lfloor \frac{N - N_a}{N_a - N_r} \right\rfloor$. Cela signifie que après l'analyse de

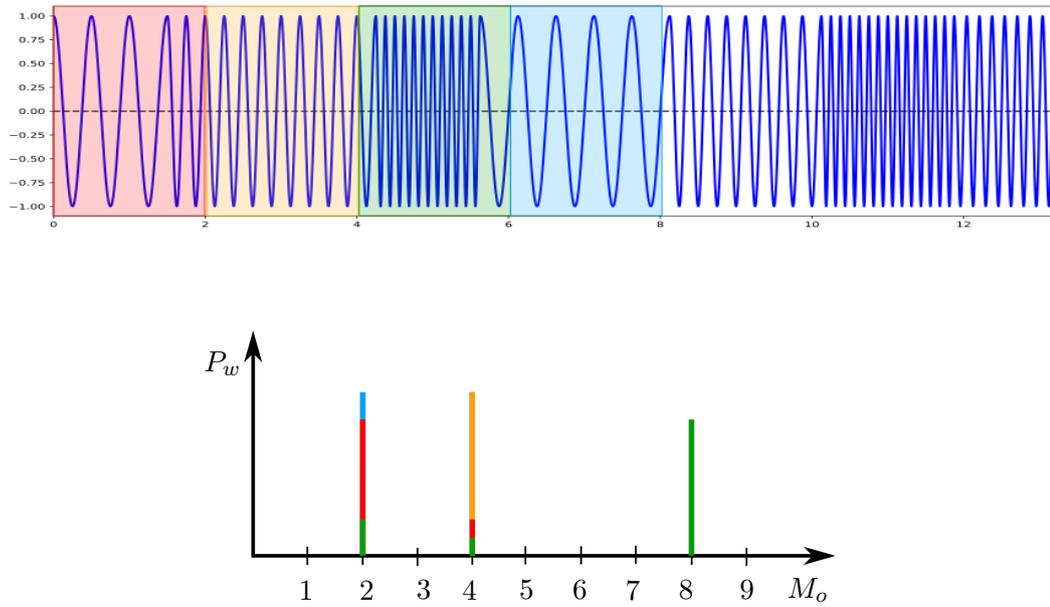


FIGURE 14 – Illustration du principe du spectrogramme et la superposition de spectre pour les 4 fenêtres d’analyse présentées.

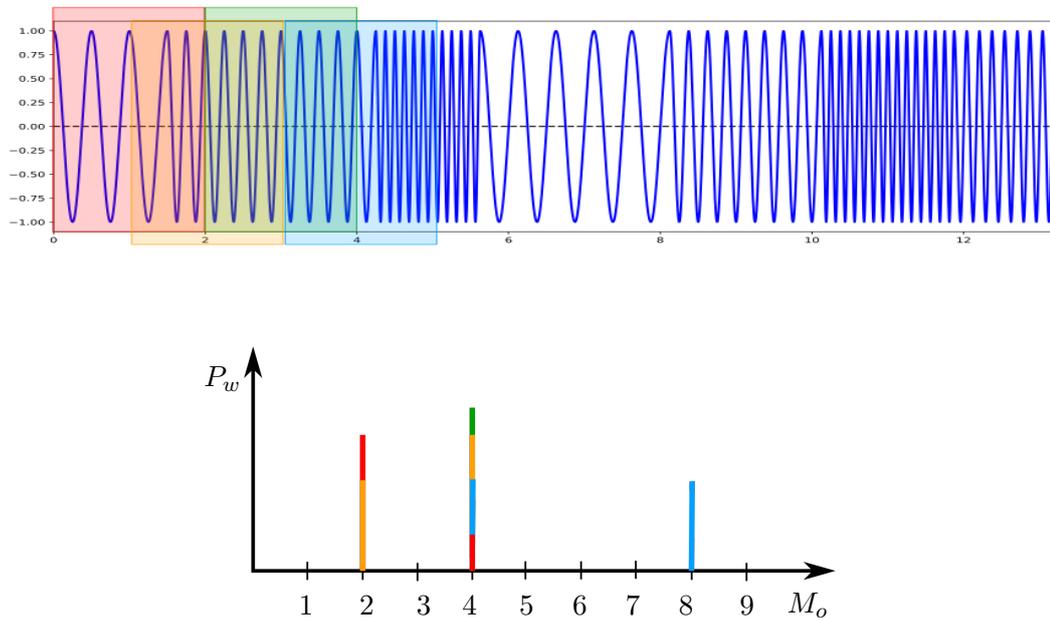
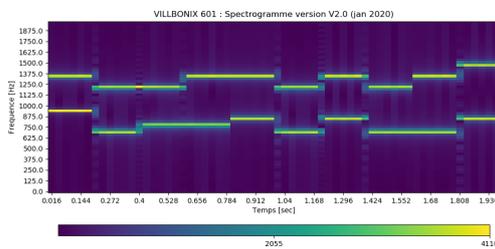


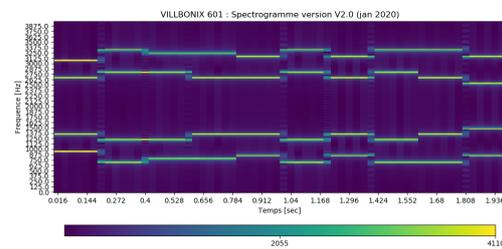
FIGURE 15 – Illustration du principe du spectrogramme avec un recouvrement entre les fenêtres d’analyse égal à la moitié de la taille de la fenêtre d’analyse, et la superposition de spectre pour les 4 fenêtres d’analyse présentées.

la première fenêtre, N_a nouveaux échantillons auront été analysés. Par contre, seuls $N - N_r$ nouveaux échantillons seront analysés par chacune des fenêtres suivantes.

La figure 16 représente le spectrogramme du signal téléphone pour une fenêtre de taille 128, sans recouvrement. La symétrie du spectre peut être observée lorsque les fréquences de 0 et f_{ech} sont représentées. Sept fréquences sont présentes dans le signal total, mais seules 2 fréquences sont présentes sur chaque intervalle de 200ms. Ce signal dure 2s ce qui correspond aux 10 chiffres qui composent un numéro de téléphone. Ce spectrogramme compte 128 points en ordonné lorsque les fréquences de 0 à f_{ech} sont représentées et 64 points lorsque seules les fréquences de 0 à $\frac{f_{ech}}{2}$ sont représentées. Comme la fréquence d'échantillonnage est de 4000Hz, la précision fréquentielle est de 31.25Hz. Les 8000 points du signal ($N = T f_{ech}$) sont analysés dans 62 fenêtres, mais 64 points du signal ne sont pas analysés ($\frac{N}{N_a} = 62.5$). Le spectrogramme compte donc 62 colonnes. Ce spectrogramme est représenté en fausse couleur : chaque couleur code une valeur de la TFD. La couleur de la TFD et la largeur de la bande spectrale varient avec la distance entre la fréquence émise et les fréquences testées. Ainsi pour le premier numéro (un 0) la fréquence 941Hz est plus proche d'une fréquence testée que la fréquence 1336Hz. Pour la fréquence 941, seul un pixel fréquentiel est de couleur jaune alors que deux pixels fréquentiels, de couleur vert clair et vert foncé sont présents pour la fréquence 1336Hz.



(a) Spectrogramme entre 0 et $\frac{f_{ech}}{2}$



(b) Spectrogramme entre 0 et f_{ech}

FIGURE 16 – Le spectrogramme du signal téléphone qui compte 7 fréquences. Sur chaque intervalle de 200ms, seules 2 fréquences sont émises.

6 Le filtrage

Dans ce cours, nous nous intéressons à deux types de filtres linéaires :

- Les filtres passe-bas, qui préservent les fréquences inférieures à la fréquence de coupure f_{PB} et suppriment les fréquences supérieures à la fréquence de coupure f_{PB} .
- Les filtres passe-haut, qui préservent les fréquences supérieures à la fréquence de coupure f_{PH} et suppriment les fréquences inférieures à la fréquence de coupure f_{PH} .

Ces filtres sont dits linéaires car le signal s_o en sortie d'un filtre peut s'écrire sous la forme suivante :

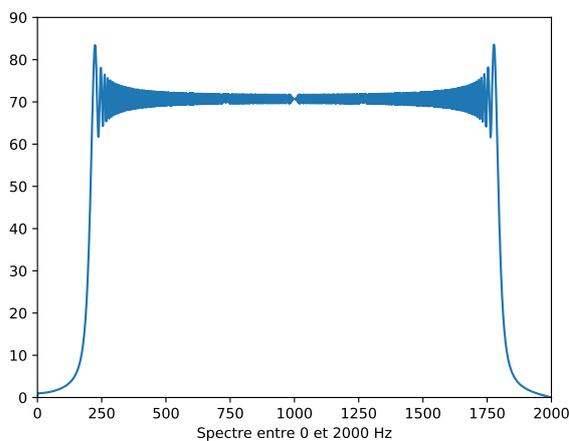
$$s_{ok} = \frac{1}{N_f} \sum_{l=-\lfloor \frac{N_f}{2} \rfloor}^{\lfloor \frac{N_f}{2} \rfloor - 1} a_l s_{k+l} \quad \forall k \in \left[\left\lfloor \frac{N_f}{2} \right\rfloor, N - \left\lfloor \frac{N_f}{2} \right\rfloor + 1 \right] \quad (11)$$

où $\{a_l\}_{l=-\lfloor \frac{N_f}{2} \rfloor}^{\lfloor \frac{N_f}{2} \rfloor - 1}$ sont les N_f coefficients du filtres, et où $\lfloor \frac{N_f}{2} \rfloor$ signifie que $\frac{N_f}{2}$ est arrondi à

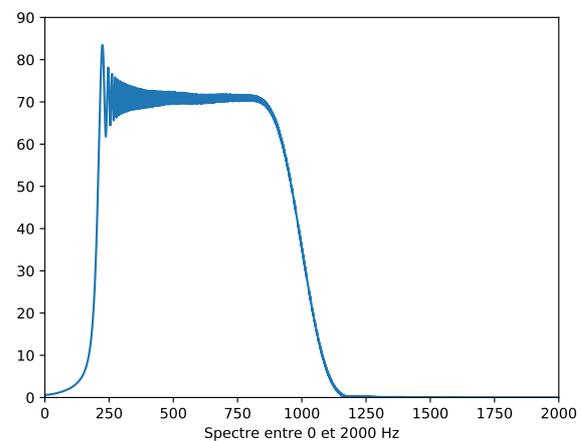
l'inférieur alors que $\lceil \frac{N_f}{2} \rceil$ signifie que $\frac{N_f}{2}$ est arrondi au supérieur. Cette opération, qui correspond faire glisser le filtre et à l'appliquer le long du signal, s'appelle la *convolution*. La taille de la fenêtre de convolution est donc N_f . Dans le cadre de ce cours, vous ne devez pas connaître cette formule mais vous devez pouvoir l'appliquer si elle vous est donnée.

Les coefficients $\{a_l\}_{l=-\lfloor \frac{N_f}{2} \rfloor, \dots, \lfloor \frac{N_f}{2} \rfloor - 1}$ sont appelés la *réponse impulsionnelle* du filtre. La valeur des coefficients dépend du type de filtre (passe-bas ou passe haut) et de la fréquence de coupure du filtre.

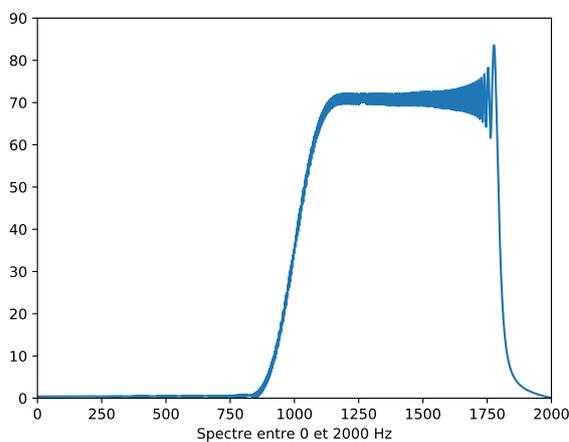
Le spectre de la réponse impulsionnelle, qui représente l'action du filtre à chaque fréquence, s'appelle la *fonction de transfert* du filtre. Pour un filtre parfait, la fonction de transfert du filtre correspond à un créneau. Ainsi, pour un filtre passe-bas parfait, toutes les fréquences inférieures à la fréquence de coupure sont préservées et toutes les fréquences supérieures à la fréquence de coupure sont rejetées. En pratique, la fonction de transfert d'un filtre n'est pas parfaite et son spectre ne correspond pas exactement à un créneau comme illustré à la figure 17 sur le spectre d'un signal de type chirp³. Des fréquences inférieures à la fréquence de coupure sont atténuées et des fréquences supérieures à la fréquence de coupure n'ont été entièrement rejetées.



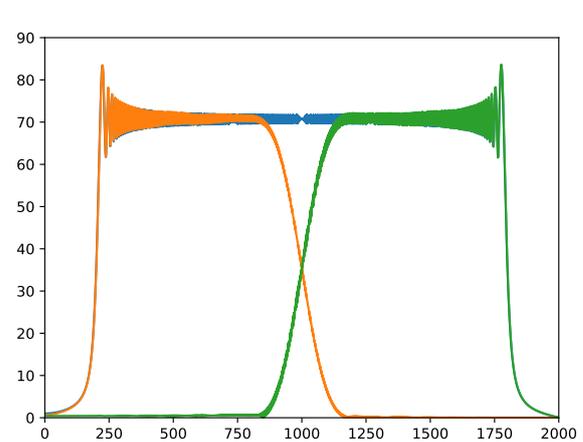
(a) Spectre d'un signal de type chirp



(b) Spectre du signal chirp après un filtre passe-bas



(c) Spectre du signal chirp après un filtre passe-haut



(d) Spectre du signal chirp, du signal chirp après un filtre passe-bas et du signal chirp après un filtre passe haut

FIGURE 17 – Illustration du principe des filtres passe-bas et passe-haut et du spectre de leur fonction de transfert.

3. Un signal de type chirp est un signal dont la fréquence varie linéairement avec le temps.

7 Modulation d'amplitude : le produit de deux signaux mono-fréquentiels

7.1 Modulation

La modulation d'amplitude est une technique qui permet l'utilisation d'une onde porteuse (EN : carrier wave) pour transporter l'information d'un signal s contenant de l'information telle que la parole ou une image. On considère donc trois signaux :

1. Le signal de référence s_r qui contient l'information à transmettre
2. Le signal porteur s_p mono-fréquentiel de fréquence f_p
3. Le signal transmis s_t

Des phénomènes liés à l'atténuation et à l'absorption des ondes qui dépendent du type ou de la fréquence des ondes, nous amènent à utiliser un type d'onde particulier pour transmettre des informations. On utilise par exemple des ondes radios ou des fibres optiques pour transporter la voix ou des images. Les ondes radios sont utilisées en raison de leur distance de propagation, qui est supérieure à celle de la voix. Grâce aux ondes radios basses fréquences, la voix peut être propagée sur 1500km. La longueur de propagation de la lumière dans les fibres optiques est de plusieurs centaines de kilomètres grâce à leur propriété de guide d'onde.

La modulation d'amplitude correspond à moduler l'amplitude du signal s_p par celle du signal s_r . C'est à dire qu'au lieu d'appliquer un gain G fixe dans le temps : $s_t = Gs_p$, on applique un gain variable correspondant à $s_t = s_r.s_p$. On effectue donc le produit des deux signaux.

A la section 5.1 nous avons vu le résultat d'un produit scalaire de deux signaux mono-fréquentiels. Dans cette section, nous allons utiliser la même formule mathématique : $\cos(a)\cos(b) = \frac{\cos(a+b)+\cos(a-b)}{2}$ pour calculer le produit de deux signaux mono-fréquentiels. Soit s_r et s_p deux signaux mono-fréquentiels discrets non déphasés de même durée T et de même nombre d'échantillons N avec $s_{rk} = \cos(2\pi M_o \frac{k}{N})$ et $s_{pk} = \cos(2\pi M_{op} \frac{k}{N})$. Le signal $s_t = s_r.s_p$ qui correspond à leur produit s'écrit :

$$\begin{aligned}
 s_{tk} &= s_{rk} \cdot s_{pk} \\
 &= \cos(2\pi M_o \frac{k}{N}) \cos(2\pi M_{op} \frac{k}{N}) \\
 &= \frac{1}{2} \cos(2\pi (M_o + M_{op}) \frac{k}{N}) + \frac{1}{2} \cos(2\pi (M_o - M_{op}) \frac{k}{N})
 \end{aligned} \tag{12}$$

On obtient donc :

$$s_{tk} = \frac{1}{2} \cos(2\pi (M_{op} + M_o) \frac{k}{N}) + \frac{1}{2} \cos(2\pi (M_{op} - M_o) \frac{k}{N}) \tag{13}$$

La modulation d'amplitude correspond à la création d'un signal contenant deux fréquences, $f_M = \frac{M_{op}+M_o}{T} = f_p + f$ correspondant à la somme entre la fréquence du signal de référence et du signal porteur et $f_m = \frac{M_{op}-M_o}{T} = f_p - f$ correspondant à la différence entre la fréquence du signal de référence et du signal porteur.

Dans l'équation (13), on peut voir que la modulation se fait toujours autour de la fréquence la plus élevée. Si $f_p \leq f$ et donc $M_o \leq M_{op}$, on obtient après modulation les fréquences :

- $\cos(2\pi(M_{op} + M_o) \frac{k}{N}) = \cos(2\pi(M_o + M_{op}) \frac{k}{N})$, car l'addition est commutative,
- $\cos(2\pi(M_{op} - M_o) \frac{k}{N}) = \cos(-2\pi(M_o - M_{op}) \frac{k}{N})$ ce qui revient à $\cos(2\pi(M_o - M_{op}) \frac{k}{N})$ puisque $M_{op} - M_o \leq 0$ et que la fonction cosinus est paire.

Pour pouvoir retrouver le signal après modulation-démodulation, il faut donc choisir une fréquence porteuse qui soit supérieure à l'ensemble des fréquences contenues dans le signal pour éviter que certaines des fréquences ne se replient autour de 0.

Avant d'émettre le signal, on va lui appliquer un filtre passe-bas ou passe-haut afin de choisir la composante $f_p - f$ ou $f_p + f$ respectivement. Dans ce cours, on a considéré des filtres dont la fréquence de coupure est égale à la fréquence porteuse f_p . Si l'on choisi un filtre passe-bas, il est nécessaire d'avoir une fréquence d'échantillonnage telle que, si $f_p + f$ se replie, la fréquence perçue f' soit toujours supérieure à la fréquence de coupure. La fréquence perçue a été calculée à l'équation (3). On a donc :

$$f' = f_{ech} - f_p - f \geq f_p$$

Cette condition se réécrit :

$$f_{ech} \geq 2f_p + f$$

Deux conditions doivent s'appliquer pour que le signal de référence puisse être obtenue après la démodulation :

1. La fréquence porteuse est supérieure à l'ensemble des fréquences de référence : $f_p > f$. A l'émission, on ne connaît pas forcément précisément les fréquences contenues dans le signal, mais on en connaît la bande de fréquence (c'est à dire la fréquence minimale et la fréquence maximale du signal).
2. Après modulation, la fréquence supérieure ne doit pas se replier dans la bande de fréquence conservée : $f_{ech} \geq 2f_p + f$.

7.2 Démodulation

La démodulation que nous allons étudier ici consiste à moduler une deuxième fois le signal modulé par la même fréquence porteuse. La figure 18 schématise l'ensemble des fréquences présentes dans le signal après modulation, puis après une deuxième modulation avec la même fréquence porteuse.

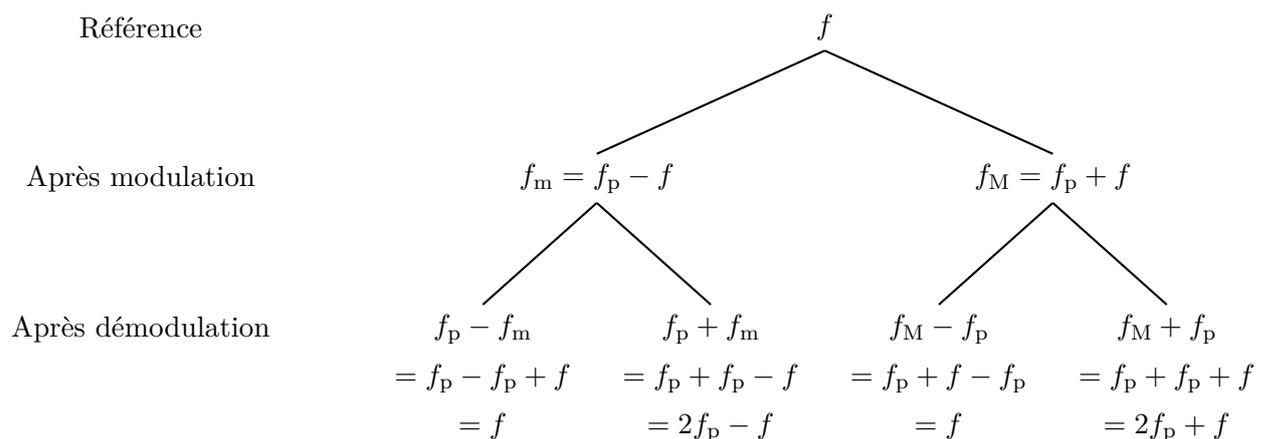


FIGURE 18 – Les fréquences contenues dans le signal après modulation, puis démodulation par une deuxième modulation avec la même fréquence porteuse.

Deux branches de l'arbre représenté à la figure 18 permettent d'obtenir après démodulation le signal ayant la fréquence de référence. Deux branches contiennent les fréquences $2f_p - f$ et $2f_p + f$ qu'il faudra filtrer.

Nous allons détailler la méthode et les conditions associées pour que les fréquences $2f_p - f$ et $2f_p + f$ puissent être filtrées et ne pas être confondues avec la fréquence de référence. Dans les deux cas, la seule fréquence connue est f_p qui est imposée dans la modulation. La fréquence f est une inconnue du signal transmis, mais nous savons que $f_p > f$.

Puisque $f < f_p$, $2f_p - f$ et $2f_p + f$ seront supérieures à la fréquence porteuse f_p . Nous pouvons donc utiliser un filtre passe bas de fréquence de coupure égale à la fréquence f_p pour conserver la fréquence inconnue f , et supprimer les fréquences $2f_p - f$ et $2f_p + f$.

Il convient maintenant de choisir la fréquence d'échantillonnage de façon adaptée pour que $2f_p - f > f_p$ ou $2f_p + f > f_p$, même si le théorème de Shannon n'est pas respecté et que ces fréquences se replient. Si $2f_p - f > \frac{f_{ech}}{2}$, alors la fréquence perçue devient : $f_{ech} - 2f_p + f$. Pour que cette fréquence soit supérieure à f_p , on obtient la condition suivante : $f_{ech} > 3f_p - f$. Si $2f_p + f > \frac{f_{ech}}{2}$, alors la fréquence perçue devient : $f_{ech} - 2f_p - f$. Pour que cette fréquence est supérieure à f_p , on obtient la condition suivante : $f_{ech} > 3f_p + f$. Comme $3f_p + f > 3f_p - f$, la condition sur la fréquence d'échantillonnage est la suivante :

$$f_{ech} > 3f_p + f$$

En choisissant de façon adaptée la fréquence porteuse par rapport à la fréquence maximale contenue dans le signal à émettre, et en choisissant la fréquence d'échantillonnage de façon adaptée par rapport à la fréquence maximale contenue dans le signal à émettre et la fréquence porteuse, on voit que la démodulation peut s'effectuer par :

1. Modulation du signal modulé par la même fréquence porteuse
2. Filtrage passe bas de fréquence de coupure égale à la fréquence porteuse

En pratique, la difficulté dans ce processus vient de la phase : il est nécessaire que le signal qui sert à la démodulation soit en phase par rapport au signal porteur qui a servi à la modulation.

7.3 Chaîne de modulation-démodulation

Une chaîne de modulation-démodulation est donc divisée en deux systèmes : le système d'émission qui effectue la modulation et le système de réception qui effectue la démodulation.

Système d'émission :

1. Enregistrez un signal de référence s_r composé de l'ensemble des fréquences $\{f\}$
2. Modulez ce signal par une fréquence porteuse $f_p \geq \max(\{f\})$
3. Appliquez un filtre PB ou PH de fréquence de coupure f_p . Dans le cas d'un signal passe bas, il faut que la fréquence d'échantillonnage vérifie l'hypothèse $f_{ech} \geq 2f_p + \max(f)$ afin que les fréquences $f_p + \max(\{f\})$ ne se replient pas dans les fréquences conservées.

Puis le signal s_t passe dans un convertisseur numérique analogique afin d'être émis.

Système de réception :

La signal reçu s_t passe dans un convertisseur analogique numérique.

1. Démodulez ce signal par la fréquence porteuse f_p
2. Appliquez un filtre PB de fréquence de coupure f_p
3. On obtient le signal de référence s_r contenant les fréquences $\{f\}$, à condition que la fréquence d'échantillonnage vérifie l'hypothèse $f_{ech} \geq 3f_p + \max(\{f\})$.

8 Conclusion

Ce cours est une introduction au traitement du signal, discipline à la croisée entre les mathématiques, la physique et l'informatique.

La première notion introduite dans ce cours est la notion de signal discret, qui a été rattachée au concept de vecteur en mathématiques. L'algèbre joue donc un rôle important dans l'analyse des signaux discrets. La comparaison de deux signaux est basée sur des notions d'algèbre : la norme du vecteur différence dans le cas de l'erreur quadratique ou le produit scalaire.

La notion de fréquence, est la notion de physique qui est le fil conducteur de ce cours. Cette notion n'est pas intrinsèquement contenue dans un signal discret où l'on ne peut que compter le nombre d'oscillations. Il est nécessaire que les signaux contiennent aussi une information de durée pour que l'on puisse retrouver la fréquence du signal. Pour souligner cette nécessité, les signaux qui ont été manipulés informatiquement pendant ce cours l'ont été au travers de la classe **Signal** qui contient 2 attributs : *val*, le tableau de valeur (ou vecteur) qui représente le signal discret et *duree*, qui contient la durée en seconde du signal.

L'échantillonnage d'un signal est une étape primordiale de sa numérisation. Pour cela, il est nécessaire de sélectionner la fréquence d'échantillonnage, c'est à dire le nombre d'échantillons par seconde que l'on va enregistrer. Le théorème de Shannon nous permet de choisir la fréquence d'échantillonnage en fonction des fréquences présentes dans le signal : la fréquence d'échantillonnage doit être supérieure à deux fois la fréquence maximale du signal à numériser. Lorsque la fréquence d'échantillonnage est plus faible que deux fois la fréquence maximale du signal à numériser, on fait face au phénomène de repliement, c'est à dire que les fréquences plus élevées que la moitié de la fréquence d'échantillonnage sont perçues comme plus basses qu'elles ne le sont réellement. Lorsque l'on sous-échantillonne un signal par décimation, c'est à dire en gardant un échantillon tous les X échantillons, on change la fréquence d'échantillonnage du signal. On peut donc faire apparaître un phénomène de repliement.

La première notion introduite dans ce cours est la notion de Transformée de Fourier Discrète (TFD) qui permet d'analyser les fréquences présentes dans un signal au travers de son spectre, et ce quelque soit la phase du signal, lorsque la fréquence d'échantillonnage du signal est bien choisie. La précision fréquentielle de la TFD dépend de la durée du signal : plus le signal est long et plus la TFD sera précise fréquentiellement. Cependant, lorsque les fréquences du signal changent au cours du temps, on peut vouloir appliquer la TFD après avoir découpé le signal d'origine en sous-signaux de durée plus courte. Cet outil d'analyse temps fréquence (où l'on analyse les fréquences au cours du temps) est appelé le spectrogramme.

Les filtres passe-bas ou passe-haut permettent de supprimer une partie des fréquences présentes dans le signal. Le filtre passe-bas préserve les fréquences plus basses que la fréquence de coupure et rejette les fréquences plus hautes que la fréquence de coupure alors que le filtre passe-haut préserve les fréquences plus hautes que la fréquence de coupure et rejette les fréquences plus basses que la fréquence de coupure. Ces filtres sont appliqués de façon temporelle au signal par une convolution : un ensemble d'échantillons successifs sont sommés après avoir été multipliés par les coefficients du filtre.

L'une des applications du filtrage et du traitement du signal de façon plus générale est la modulation d'amplitude. La modulation d'amplitude consiste à multiplier chaque échantillon d'un signal de référence par les échantillons d'un signal mono-fréquentiel dont la fréquence est appelée porteuse. Pour un signal de référence mono-fréquentiel, ce principe permet de créer une somme de signaux mono-fréquentiels dont la fréquence est symétrique par rapport à la fréquence porteuse. L'avantage de modifier ainsi la fréquence d'un signal est de pouvoir utiliser des bandes de fréquences qui permettent une meilleure propagation ou

TABLE 1 – Acquis d’apprentissage visés de l’UE Radiofréquences. Les acquis d’apprentissage spécifique sont indiqué en gras. A l’issue de ce cours, les élèves sont capable :

AAE	Séance		
D’estimer la fréquence d’un signal numérique			
Savoir que la TFD ne peut s’appliquer que pour des nombres d’oscillations entiers			
Connaitre la définition du spectre d’un signal et comprendre qu’il est discret			
Savoir que le spectre est périodique et que sa période dépend de la fréquence d’échantillonnage			
Savoir que le spectre présente une symétrie hermitienne qui se traduit par une symétrie autour de la fréquence 0 pour le module du spectre			
Savoir reconnaître quand le spectre est représenté entre 0 et $\frac{f_{ech}}{2}$ ou entre 0 et f_{ech}			
Comprendre le théorème de Shannon à partir des propriété de périodicité et de symétrie hermitienne du spectre			
Savoir que la précision fréquentielle du spectre dépend de la durée du signal			
Comprendre le principe du spectrogramme : calculer le spectre par morceaux			
D’utiliser un filtre pour supprimer des fréquences du signal			
Connaitre le principe des filtres passe-bas et passe-haut			
Connaitre la définition de la fréquence de coupure			
Connaitre la définition d’un filtre linéaire et de sa fonction de transfert			
Savoir que les filtre ne sont pas parfait et connaitre l’impact de cet imperfection sur le spectre d’un signal filtré			
De choisir les paramètres de modulation d’un signal pour le transmettre			
Savoir que l’amplitude d’un signal peut être variable dans le temps			
Connaitre la forme d’un signal mono-fréquentiel après modulation par un signal mono-fréquentiel			
Connaitre la définition de fréquence porteuse			
Connaitre les conditions de choix de la fréquence porteuse en fonction de f_{ech} et du contenu fréquentiel du signal à transmettre			
Savoir qu’un technique de démodulation est basé sur le principe de la modulation			
Savoir utiliser un filtre pour obtenir le signal à transmettre après démodulation			

même de changer de domaine physique en passant par exemple d’onde électromagnétique à des fibres optiques. De plus, les signaux d’origine peuvent être re-obtenue par démodulation, ce qui consiste en une opération de modulation d’amplitude avec la même fréquence porteuse suivi d’un filtrage des hautes fréquences résiduelles.

Le tableau 1 reprend l’ensemble des Acquis d’Apprentissages Visés durant le cours, et des Acquis d’Apprentissages Elémentaires qui les composent.