

CONCOURS BLANC

Ce sujet est composé de deux problèmes indépendants.

Rappel : Le groupe symétrique S_n est le groupe des bijections de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$ munit de la loi de composition. Deux éléments σ_1 et σ_2 de S_n sont dits conjugués s'il existe un élément $\tau \in S_n$ tel que $\sigma_1 = \tau\sigma_2\tau^{-1}$. Soit $1 \leq k \leq n$. Un élément σ de S_n est appelé un k -cycle, s'il existe $\{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, n\}$ tel que $\sigma(i_j) = \sigma(i_{j+1})$ pour tout $1 \leq j < k$ et $\sigma(i_k) = \sigma(i_1)$. On le note $(i_1 i_2 \dots i_{k-1} i_k)$.

Problème 1 : Vrai-Faux

Pour chacune des assertions suivantes, préciser si elle est vraie ou fautive puis justifier la réponse donnée. Toute réponse non argumentée ne sera pas prise en compte.

- 1) Soit f une fonction continue de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .
 - a) Si pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x) + f(y) = f(x + y)$ alors $f(0) = 0$.
 - b) Si pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x + y) = f(x)f(y)$ alors $f(0) = 1$.
- 2) L'ensemble \mathcal{S} des solutions dans $\mathbb{Z}/20\mathbb{Z}$ de l'équation :

$$2x \equiv 10 \pmod{20}$$

est $\mathcal{S} = \{\bar{5}\}$.

- 3) Soit p un nombre premier. Alors \sqrt{p} est irrationnel.
- 4) Toute fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur \mathbb{R} est dérivable sur \mathbb{R} .
- 5) Soit f une fonction continue de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} . Si $\int_0^1 f(x)dx = 0$ alors f est la fonction identiquement nulle.
- 6) Soient M_1, M_2 et M_3 trois points du plan complexe et $z_{M_1}, z_{M_2}, z_{M_3}$ leur affixe respective. Les points M_1, M_2 et M_3 sont alignés si et seulement si il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $z_{M_1} = \lambda z_{M_2} = \mu z_{M_3}$.
- 7) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}$, $z = e^{\frac{ik\pi}{n}}$ est une racine n -ième de l'unité.
- 8) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'ensemble des racines n -ième de l'unité muni de la loi $+$ forme un sous-groupe de $(\mathbb{C}, +)$.

- 9) On considère le groupe symétrique S_4 .
- Les deux permutations (1234) et (1324) sont conjuguées dans S_4 .
 - La relation de conjugaison sur S_4 est une relation d'équivalence.
- 10) Soit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $n \times n$ à coefficients réels. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $AB = 0$ implique que A ou B est la matrice nulle.
- 11) Soient A, B deux sous-ensembles d'un ensemble E . On note A^C le complémentaire $E \setminus A$ de A dans E .
- $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$.
 - La négation de : " A n'est pas inclus dans le complémentaire de B " est " A est inclus dans B ".
- 12) Votre voisine a deux enfants dont vous ignorez le sexe. On considère les trois événements suivants :
- A : "les deux enfants sont de même sexe".
 - B : " l'aîné est une fille".
 - C : " le cadet est une fille".
- Les événements sont deux à deux indépendants.
 - Les événements sont mutuellement indépendants, c'est-à-dire, que $p(A \cap B \cap C) = p(A)p(B)p(C)$.
- 13) Considérons le sous-ensemble suivant de \mathbb{R}^3 :
- $$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 0\}.$$
- F est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .
 - Posons $u_1 = (-2, 1, 0)$ et $u_2 = (1, 0, 1)$. L'ensemble $\{u_1, u_2\}$ forme une base de F .

Problème 2 : Extrait de l'écrit 1 de 2018

Notations

\mathbb{N} désigne l'ensemble des entiers naturels et \mathbb{N}^* l'ensemble des entiers naturels non nuls.
 Pour m et n deux entiers naturels, $[[m; n]]$ désigne l'ensemble des entiers k tels que $m \leq k \leq n$.
 \mathbb{Z} désigne l'ensemble des entiers relatifs.
 \mathbb{Q} désigne l'ensemble des nombres rationnels.
 \mathbb{R} désigne l'ensemble des nombres réels.
 On note e le nombre $\exp(1)$, image de 1 par la fonction exponentielle.
 On rappelle que, pour tout nombre réel x , il existe un unique entier relatif $E(x)$ tel que $E(x) \leq x < E(x) + 1$. Cet entier $E(x)$ est appelé *partie entière* de x .

Partie A : suites adjacentes

Étant donné deux suites réelles $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on rappelle qu'elles sont dites *adjacentes* si l'une des deux est croissante, l'autre décroissante et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n - b_n) = 0$.

I. On suppose dans cette question que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et que la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

1. Montrer que la suite $(a_n - b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone et en déduire que pour tout entier naturel n , $a_n \leq b_n$.
2. Justifier que les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont convergentes vers une même limite ℓ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n \leq \ell \leq b_n.$$

3. On suppose de plus les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ strictement monotones. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n < \ell < b_n.$$

II. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $a_n = \sum_{p=0}^n \frac{1}{p!}$ et $b_n = a_n + \frac{1}{n \times n!}$.

1. Montrer que les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.
2. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $e - a_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-t)^n e^t dt$.
Indication : on pourra procéder par récurrence.
3. En déduire que pour tout entier naturel n non nul, $0 < e - a_n < \frac{1}{n \times n!}$.
 En déduire la limite de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
Indication : on pourra étudier la variation de la fonction $t \mapsto (1-t)e^t$.
4. En déduire une valeur de n telle que a_n soit une valeur approchée de e à 10^{-5} près.

5. On suppose que e est un nombre rationnel.
- Montrer qu'il existe un entier naturel non nul q tel que le nombre e^q soit un entier naturel.
 - Montrer que $x = q! \left(e - \sum_{p=0}^q \frac{1}{p!} \right)$ est un entier naturel.
 - Montrer que $0 < x < 1$.
 - Conclure.

Partie B : écriture d'un entier en base deux

Le but de cette partie est de démontrer que tout entier naturel N supérieur ou égal à 2 s'écrit de manière unique

$$N = \sum_{k=0}^{n-1} d_k 2^k \quad \text{avec} \quad n \geq 2 \quad \text{et} \quad \begin{cases} \forall k \in \llbracket 0 ; n-2 \rrbracket, & d_k \in \{0, 1\}, \\ d_{n-1} = 1. \end{cases}$$

L'égalité précédente se note $N = \overline{d_{n-1}d_{n-2}\dots d_0}$ (écriture de N en base deux); la suite finie $(d_k)_{0 \leq k \leq n-1}$ s'appelle la suite des chiffres dans l'écriture de N en base deux.

Dans toute cette partie, N désigne un entier naturel supérieur ou égal 2.

- IV. On suppose que $N = \sum_{k=0}^{n-1} d_k 2^k$ avec $\forall k \in \llbracket 0 ; n-2 \rrbracket \quad d_k \in \{0, 1\}$ et $d_{n-1} = 1$.
- Montrer que $2^{n-1} \leq N \leq 2^n - 1$.
 - Montrer que d_0 est le reste de la division euclidienne de N par 2.
 - Démontrer que la suite (d_0, \dots, d_{n-1}) est déterminée de manière unique.
- V. On définit deux suites d'entiers $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(d_k)_{k \in \mathbb{N}}$ par $y_0 = N$ et pour tout entier naturel k , y_{k+1} et d_k désignent respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de y_k par 2.
- On fixe $k \in \mathbb{N}^*$. Exprimer N en fonction de k , d_0, \dots, d_{k-1} et y_k .
 - Démontrer que la suite $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est nulle à partir d'un certain rang et qu'il existe un entier $n \geq 1$ tel que $\overline{d_{n-1}d_{n-2}\dots d_0}$ soit l'écriture de N en base deux.
 - Écrire un algorithme qui, pour tout entier naturel N supérieur ou égal 2 donné, renvoie la suite $(d_0, d_1, \dots, d_{n-1})$ des chiffres de son écriture en base deux.
 - Écrire en base deux le nombre qui s'écrit 391 en base dix.
- VI. On se propose à présent de calculer le nombre N qui s'écrit $\overline{d_{n-1}d_{n-2}\dots d_0}$ en base deux.
- Première méthode : méthode « naïve ».

On écrit $N = \sum_{k=0}^{n-1} d_k 2^k$. Combien d'opérations (additions et multiplications) doit-on effectuer a priori pour calculer N avec cette méthode ?
 - Deuxième méthode : méthode de Hörner.

On écrit $N = (((d_{n-1} \times 2 + d_{n-2}) \times 2 + d_{n-3}) \times 2 + \dots) \times 2 + d_0$. Combien d'opérations (additions et multiplications) doit-on effectuer a priori pour calculer N avec cette méthode ?
 - Écrire un algorithme qui, pour toute suite de chiffres (d_0, \dots, d_{n-1}) donnée, renvoie la valeur de N calculée à l'aide de cette deuxième méthode.
 - Quel est le nombre dont l'écriture en base deux est $\overline{101001000100001}$?

Partie C : nombres dyadiques

L'ensemble $D_2 = \left\{ \frac{a}{2^p} ; a \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{N} \right\}$ est appelé ensemble des nombres dyadiques. On note D_2^+ l'ensemble des nombres dyadiques positifs ou nuls.

VII. Montrer que \mathbb{Z} est strictement inclus dans D_2 et que D_2 est strictement inclus dans \mathbb{Q} . *Indication* : on pourra montrer que $\frac{1}{3} \notin D_2$.

VIII. Soit $x \in D_2^+ \setminus \mathbb{N}$. On se propose de démontrer qu'il existe un unique entier $n \geq 1$ et une unique suite (a_0, a_1, \dots, a_n) avec $a_0 \in \mathbb{N}$ et $(a_1, \dots, a_n) \in \{0, 1\}^n$ tels que

$$x = \sum_{k=0}^n a_k 2^{-k}, \quad \text{avec } a_n \neq 0.$$

Le membre de droite de cette égalité s'appelle le développement dyadique de x .

1. On suppose qu'une telle suite existe. Montrer que $a_0 = E(x)$ puis montrer que la suite (a_0, a_1, \dots, a_n) est déterminée de manière unique.

,

2. On souhaite à présent montrer l'existence d'une telle suite. À l'aide de la partie précédente, montrer l'existence d'un entier a_0 , d'un entier $p \geq 1$ et d'une suite de nombres entiers d_0, \dots, d_{p-1} égaux à 0 ou 1, non tous nuls, tels que

$$x = a_0 + \sum_{k=0}^{p-1} d_k 2^{k-p}.$$

3. Conclure.

IX. Donner le développement dyadique de $\frac{35}{4}$.

Partie D : développement dyadique illimité

On appelle suite dyadique toute suite $(a_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ où pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, a_k est un élément de $\{0, 1\}$. De plus :

- une suite dyadique $(a_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est dite impropre s'il existe un entier $m \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $k \geq m$, $a_k = 1$;
- une suite dyadique $(a_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est dite propre si elle n'est pas impropre.

X. On suppose que $a = (a_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une suite dyadique.

1. Démontrer que la série de terme général $a_k 2^{-k}$ est convergente. On note sa somme

$$s(a) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k 2^{-k}.$$

2. Soit N un entier naturel. Que vaut $\sum_{k=N}^{+\infty} 2^{-k}$?

3. Vérifier que $s(a) \in [0, 1]$.

4. Montrer que si a est une suite dyadique propre, alors $s(a) \in [0, 1[$.

5. Montrer que si a est une suite dyadique impropre, alors $s(a)$ est un nombre dyadique.

6. Soit $a = (a_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par

$$a_k = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ est impair,} \\ 1 & \text{si } k \text{ est pair.} \end{cases}$$

Montrer que $s(a) = \frac{1}{3}$.

XI. Soit x un nombre dyadique compris dans l'intervalle $[0, 1[$.

1. En utilisant les résultats de la partie C, montrer qu'il existe une suite dyadique propre a telle que

$$x = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k 2^{-k}.$$

2. Montrer que si x est non nul, alors il existe également une suite dyadique impropre b telle que

$$x = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k 2^{-k}.$$

Partie E : suite extraite de la suite $(\cos(n\pi\theta))_{n \in \mathbb{N}}$

XVI. Dans cette question, θ désigne un nombre réel strictement positif. On pose

$$c_n = \cos(n\pi\theta), \quad s_n = \sin(n\pi\theta).$$

1. Vérifier que pour tout entier naturel n ,

$$\begin{aligned} c_{n+1} + c_{n-1} &= 2c_n \cos(\pi\theta), \\ c_{n+1} - c_{n-1} &= -2s_n \sin(\pi\theta), \\ c_n^2 + s_n^2 &= 1. \end{aligned}$$

2. En déduire que la suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge si et seulement si θ est un entier relatif pair.

Indication : on pourra raisonner par disjonction de cas, suivant la valeur de $\cos(\pi\theta)$.

XVII. On s'intéresse à présent à la suite $(c_{2^n})_{n \in \mathbb{N}}$ extraite de $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Pour tout entier naturel n , on pose :

$$u_n = c_{2^n} = \cos(2^n \pi \theta).$$

1. On suppose (dans cette question uniquement) que θ est un nombre dyadique. Quelle est la nature de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$?
2. On suppose (dans cette question uniquement) qu'il existe un nombre dyadique x tel que $\theta = x + \frac{1}{3}$. Quelle est la nature de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$?
3. On suppose (dans cette question uniquement) qu'il existe un nombre dyadique x tel que $\theta = x + \frac{2}{3}$. Quelle est la nature de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$?
4. Justifier que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 2u_n^2 - 1$.
5. Lorsque la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ , quelles sont les seules valeurs possibles pour le réel ℓ ?

On suppose à présent qu'on a démontré que pour tout réel $x \in [0, 1[$, il existe une unique suite dyadique propre $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que

$$x = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k 2^{-k}.$$

6. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définissant le développement dyadique propre de $\theta = E(\theta)$. Montrer que, quel que soit l'entier naturel n , il existe un entier relatif k_n et un réel ε_n appartenant à l'intervalle $[0, \frac{1}{2}]$ tels que :

$$2^n \theta = 2k_n + a_n + \frac{a_{n+1}}{2} + \varepsilon_n.$$

7. Démontrer que :

- si $a_n = a_{n+1}$, alors $u_n \geq 0$;
- si $a_n \neq a_{n+1}$, alors $u_n \leq 0$.

Puis que :

- si $u_n > 0$, alors $a_n = a_{n+1}$;
- si $u_n < 0$, alors $a_n \neq a_{n+1}$.

8. On suppose que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un nombre réel $\ell > 0$. Montrer qu'à partir d'un certain rang, $a_n = 0$. En déduire que θ est un nombre dyadique.
9. On suppose que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un nombre réel $\ell < 0$. Montrer qu'à partir d'un certain rang, $a_{n+1} \neq a_n$. En déduire que $\theta - \frac{1}{3}$ ou $\theta - \frac{2}{3}$ est un nombre dyadique.

ⓧVIII. Énoncer et démontrer une condition nécessaire et suffisante pour que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. On justifiera ce résultat et on précisera le cas échéant la valeur de sa limite.