CORRECTION VRAI-FAUX DU CONCOURS BLANC DU 30/01/25

1) a) Vrai. Soit f une telle fonction. Alors en prenant $x = y = 0$ on obtient que $2f(0) = f(0)$ ce qui implique que $f(0) = 0$.

   b) Faux. Voici un contre-exemple. Considérons la fonction f identiquement nulle :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto 0. \end{aligned}$$

   f est une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de plus pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x + y) = 0 = f(x)f(y)$.

2) Faux. La classe $\bar{15}$ dans $\mathbb{Z}/20\,\mathbb{Z}$ est solution :

$$\begin{aligned} 2 \times 15 \ &\equiv 30 \pmod{20} \\ &\equiv 10 \pmod{20}. \end{aligned}$$

3) Vrai. Soit p un nombre premier. Supposons par l'absurde que $\sqrt{p}$ soit rationnel. Comme $\sqrt{p}$ est strictement positif, il existe $a, b \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux tels que $\sqrt{p} = \frac{a}{b}$. Ceci implique que $p = \frac{a^2}{b^2}$ et donc que

$$b^2 p = a^2. \tag{0.1}$$

   Par hypothèse, a est premier avec b et donc avec b^2, ainsi par le lemme de Gauss, a divise p. Comme p est un nombre premier cela implique que $a = 1$ ou $a = p$. Si $a = 1$, alors on obtient une contradiction car p ne divise pas 1. Si $a = p$ alors en remplaçant a par p dans l'équation 0.1, on obtient que $b^2 p = p^2$ et donc que $b^2 = p$. p étant un nombre premier, cela implique que p divise b par le Lemme d'Euclide ce qui mène à une contradiction car a et b sont premiers entre eux.

4) Faux. Voici un contre-exemple. La fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas dérivable en 0 car la limite à gauche vaut -1 et celle à droite vaut 1.

5) Faux. Voici un contre-exemple. Considérons la fonction

$$\begin{aligned} f : [0, 1] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

   C'est une fonction affine, elle est donc continue. De plus $\int_0^1 (x - \frac{1}{2})dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}\right]_0^1 = 0$.

6) Faux. Voici un contre-exemple. Considérons les points M_1, M_2, M_3 d'affixe respective $z_1 = i$, $z_2 = 1$ et $z_3 = 2 - i$. Ces trois points passent par la droite d'équation $y = -x + 1$. Or il n'existe aucun réel $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda = i$.

7) Faux. Pour $k = 1$, $\left(e^{\frac{i\pi}{n}}\right)^n = e^{i\pi} = -1$ donc $e^{\frac{i\pi}{n}}$ n'est pas une racine n-ème de l'unité.

8) Faux. 0 est l'élément neutre du groupe $(\mathbb{C}, +)$, or ce n'est pas une racine n-ème de l'unité donc l'ensemble des racines n-ème de l'unité ne forme pas un sous-groupe de $(\mathbb{C}, +)$.
9) a) Vrai. La transposition $(23) \in S_4$ et de plus,

$$(23)(1234)(23) = (23)(241) = (1324).$$

Ainsi, les deux permutations (1234) et (1324) sont conjuguées dans S_4.

b) Vrai.

(i) La relation de conjugaison est réflexive : pour tout $\sigma \in S_4$, en notant id la bijection identité, on a $\mathrm{id}\,\sigma\,\mathrm{id}^{-1} = \sigma$.

(ii) La relation de conjugaison est symétrique : soient $\sigma_1, \sigma_2 \in S_4$ telles que σ_1 et σ_2 soient conjuguées. Alors, par définition, il existe un élément $\tau \in S_4$ tel que $\sigma_1 = \tau\sigma_2\tau^{-1}$. Ce qui implique que $\sigma_2 = \tau^{-1}\sigma_1(\tau^{-1})^{-1}$. Comme $\tau^{-1} \in S_4$ on obtient que σ_2 et σ_1 sont conjugués.

(iii) La relation de conjugaison est transitive. Soient $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \in S_4$ telles que σ_1 et σ_2 soient conjuguées et que σ_2 et σ_3 soient conjuguées. Montrons que σ_1 et σ_3 sont conjuguées. Par définition, il existe $\tau_1, \tau_2 \in S_4$ telles que $\sigma_1 = \tau_1\sigma_2\tau_1^{-1}$ et $\sigma_2 = \tau_2\sigma_3\tau_2^{-1}$. Ainsi, $\sigma_1 = \tau_1(\tau_2\sigma_3\tau_2^{-1})\tau_1^{-1} = (\tau_1\tau_2)\sigma_3(\tau_1\tau_2)^{-1}$. Comme $(\tau_1\tau_2) \in S_4$, σ_1 et σ_3 sont conjuguées.

Ainsi, la relation de conjugaison sur S_4 est une relation d'équivalence.

10) Faux. Voici un contre-exemple. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Alors $AA = 0$ or A n'est pas la matrice nulle.
11) a) Vrai. Soit $x \in E$. $x \in (A \cap B)^C$ si et seulement si $x \notin A \cap B$ si et seulement si ($x \notin A$ ou $x \notin B$) si et seulement si $x \in A^C \cup B^C$.

b) Faux. Soit P l'assertion : "A n'est pas inclus dans le complémentaire de B", et Q l'assertion : "A est inclus dans B". Soient A et B deux ensembles disjoints. Alors les assertions P et Q sont toutes les deux fausses donc Q n'est pas la négation de P.

12) **Oublié dans l'énoncé : on suppose que la probabilité d'avoir un garçon est égale à celle d'une fille et vaut $\frac{1}{2}$.** L'univers est composé des couples suivants : $\Omega = \{(F, F), (F, G), (G, G), (G, F)\}$ où la première composante représente l'enfant ainé, et F représente le fait d'avoir eu une fille, et G celui d'avoir eu un garçon.

a) Vrai. Ainsi $A = \{(F, F), (G, G)\}$, $B = \{(F, G), (F, F)\}$ et $C = \{(F, F), (G, F)\}$ donc $p(A) = p(B) = p(C) = \frac{1}{2}$.
De plus : $A \cap B = A \cap C = B \cap C = \{(F, F)\}$, ainsi $p(A \cap B) = \frac{1}{4} = p(A)p(B)$, $p(A \cap C) = \frac{1}{4} = p(A)p(C)$ et $p(B \cap C) = \frac{1}{4} = p(B)p(C)$.
Nous avons donc montré que les évènements sont deux à deux indépendants.

b) Faux. $A \cap B \cap C = \{(F, F)\}$ ainsi $p(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4}$ or $p(A)p(B)p(C) = \frac{1}{8}$ donc les évènements ne sont pas mutuellement indépendants.

13) a) $(0, 0, 0) \in F$ car $0 + 2 \times 0 - 0 = 0$. Soient $u = (x_1, y_1, z_1), v = (x_2, y_2, z_2) \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $u + \lambda v = (x_1 + \lambda x_2, y_1 + \lambda y_2, z_1 + \lambda z_2)$.
On a alors : $x_1 + \lambda x_2 + 2(y_1 + \lambda y_2) - (z_1 + \lambda z_2) = x_1 + 2y_1 - z_1 + \lambda(y_1 + 2y_2 - z_2)$. Or $u_1, u_2 \in F$ donc $x_1 + 2y_1 - z_1 = 0$ et $x_2 + 2y_2 - z_2 = 0$,

ainsi $x_1 + \lambda x_2 + 2(y_1 + \lambda y_2) - (z_1 + \lambda z_2) = 0$ et $u + \lambda v \in F$. Nous avons donc montré que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

b) Les vecteurs u_1 et u_2 ne sont pas colinéaires donc ils forment une famille libre de F. De plus pour tout $w = (x, y, z) \in F$, $w = yu_1 + zu_2$ donc $\{u_1, u_2\}$ est aussi une famille génératrice de F, c'est donc une base.

Email address: `anne.lonjou@universite-paris-saclay.fr`