TD8

1°/ $n_1 + n_2 = N = \text{cste}$. Les particules n'étant pas en interaction, il est raisonnable de postuler $\boxed{p = \frac{1}{2}}$.

2°/ On a n_1 particules dans $V_1 \Rightarrow p^{n_1}$

n_2 particules dans $V_2 \Rightarrow (1-p)^{n_2} = (1-p)^{N-n_1}$

Par ailleurs, les n_1 particules ont été choisies parmi $N \Rightarrow C_N^{n_1}$.

Finalement $\boxed{P(n_1) = C_N^{n_1} p^{n_1} (1-p)^{N-n_1} = \binom{N}{n_1} p^{n_1} (1-p)^{N-n_1}}$.

On vérifie que $\sum_{n_1=0}^{N} P(n_1) = \sum_{n_1=0}^{N} C_N^{n_1} p^{n_1} (1-p)^{N-n_1} = (p+(1-p))^N = 1^N = 1$ ☺.

3°/ * $N = 6$

$P(0) = \frac{C_6^0}{2^6} = 0{,}03125$ $\simeq 0{,}015$; $P(3) = \frac{C_6^3}{2^6} = 0{,}3125$; $P(4) = \frac{C_6^4}{2^6} = 0{,}2344$

* $N = 10$

$P(0) = \frac{C_{10}^0}{2^{10}} = 0{,}001953$ $\simeq 0{,}001$; $P(5) = \frac{C_{10}^5}{2^{10}} = 0{,}2461$; $P(6) = \frac{C_{10}^6}{2^{10}} = 0{,}2051$

* $N = 100$

$P(0) = \frac{C_{100}^0}{2^{100}} = 1{,}578 \cdot 10^{-30}$ $\simeq 8 \cdot 10^{-31}$; $P(50) = \frac{C_{100}^{50}}{2^{100}} = 0{,}07959$; $P(51) = \frac{C_{100}^{51}}{2^{100}} = \frac{50}{51} P(50) = 0{,}07803$

Plus N est grand, plus la distribution se rapproche de la loi binomiale et plus la probabilité de partage en deux sous-volumes avec n_1 et n_2 très différents est faible.

4°/ $\bar{n} = \sum_{n_1=0}^{N} n_1 P(n_1) = \sum_{n_1} n_1 C_N^{n_1} p^{n_1} (1-p)^{N-n_1} = \sum_{n_1} C_N^{n_1} p (p^{n_1})' (1-p)^{N-n_1}$

et donc $\cancel{\bar{n} = [(p^{n_1})' + (1-p)]^N}$ $\bar{n} = p \left(\sum_{n_1} C_N^{n_1} p^{n_1} (1-p)^{N-n_1} \right)'$

soit $\boxed{\bar{n}} = p\left[(p + (1-p))^N\right]' = \boxed{Np}$

4° $\bar{n} = \sum_{n_1=0}^{N} n_1 P(n_1) = \sum_{n_1=1}^{N} n_1 \frac{N!}{n_1!(N-n_1)!} p^{n_1}(1-p)^{N-n_1}$ (1er terme somme $0 \times P(0) = 0$)

$$= \sum_{n_1=1}^{N} \frac{N!}{(n_1-1)!(N-n_1)!} p^{n_1}(1-p)^{N-n_1}$$

On pose $n_1' = n_1 - 1 \Rightarrow \bar{n} = \sum_{n_1'=0}^{N-1} \frac{N!}{n_1'!(N-n_1'-1)!} p\, p^{n_1'}(1-p)^{N-n_1'-1}$

$$= \sum_{n_1'=0}^{N-1} \frac{N(N-1)!}{n_1'!(N-n_1'-1)!} p\, p^{n_1'}(1-p)^{N-n_1'-1}$$

$$= Np \underbrace{\sum_{n_1'=0}^{N-1} C_{n_1'}^{N-1} p^{n_1'}(1-p)^{N-n_1'-1}}_{\equiv 1}$$

Donc $\boxed{\bar{n} = Np}$.

Autre méthode : On peut remarquer que $n_1 p^{n_1} = p\frac{d}{dp}(p^{n_1})$ et en notant $q = (1-p)$, on peut alors écrire :

$$\bar{n} = \sum_{n_1=0}^{N} n_1 P(n_1) = \sum_{n_1=0}^{N} n_1 \binom{N}{n_1} p^{n_1} q^{N-n_1} = \sum_{n_1=0}^{N} \binom{N}{n_1} p\frac{d}{dp}(p^{n_1})\, q^{N-n_1}$$

soit $\bar{n} = p\frac{d}{dp}\left(\sum_{n_1=0}^{N}\binom{N}{n_1} p^{n_1} q^{N-n_1}\right) = p\frac{d}{dp}\left[(p+q)^N\right] = Np\underbrace{(p+q)}_{\equiv 1}^{N-1}$

et donc $\boxed{\bar{n} = Np}$.

5° On a $P(n_1) = \frac{C_N^{n_1}}{2^N}$ et puisque $p = \frac{1}{2}$, alors $P(\bar{n}+\delta n_1) = \frac{C_N^{\bar{n}+\delta n_1}}{2^N} = \frac{1}{2^N}\frac{N!}{(\bar{n}+\delta n_1)!(N-\bar{n}-\delta n_1)!}$

Ainsi $\ln P(\bar{n}+\delta n_1) = -N\ln 2 + \ln N! - \ln(\bar{n}+\delta n_1)! - \ln(N-\bar{n}-\delta n_1)!$

$$\simeq -N\ln 2 + N\ln N - (\bar{n}+\delta n_1)\ln(\bar{n}+\delta n_1) - (N-\bar{n}-\delta n_1)\ln(\underbrace{N-\bar{n}}_{=\bar{n}}-\delta n_1)$$

car $\bar{n} = \frac{N}{2}$ (pN avec $p=\frac{1}{2}$)

soit $\ln P(\bar{n}+\delta n_1) \simeq -N\ln 2 + N\ln N - (\bar{n}+\delta n_1)\left[\ln\bar{n} + \ln\left(1+\frac{\delta n_1}{\bar{n}}\right)\right] - (\bar{n}-\delta n_1)\left[\ln\bar{n} + \ln\left(1-\frac{\delta n_1}{\bar{n}}\right)\right]$

$$\simeq -N\ln 2 + N\ln N - 2\bar{n}\ln\bar{n} - (\bar{n}+\delta n_1)\ln\left(1+\frac{\delta n_1}{\bar{n}}\right) - (\bar{n}-\delta n_1)\ln\left(1-\frac{\delta n_1}{\bar{n}}\right)$$

$$\simeq \underbrace{-N\ln 2 + N\ln N - N\ln\frac{N}{2}}_{=0} - (\bar{n}+\delta n_1)\left(\frac{\delta n_1}{\bar{n}} - \frac{\delta n_1^2}{2\bar{n}^2}\right) - (\bar{n}-\delta n_1)\left(-\frac{\delta n_1}{\bar{n}} - \frac{\delta n_1^2}{2\bar{n}^2}\right)$$

$\simeq \frac{\delta n_1^2}{\bar{n}} - 2\frac{\delta n_1^2}{\bar{n}}$ et donc $\boxed{\ln P(\bar{n}+\delta n_1) \simeq -\frac{2}{N}\delta n_1^2}$

6/ On a donc $P(\bar{n}+\delta n_1) \simeq e^{-\frac{2}{N}\delta n_1^2}$ et on cherche δn_1 tel que (3)

$P(\bar{n}+\delta n_1) < 0{,}001$. Donc $\delta n_1 > \sqrt{\frac{N}{2}\ln 1000}$, soit $\boxed{\delta n_1 > \sqrt{\frac{3N}{2}\ln 10}}$ $(1000 = 10^3)$

$N = 1000 \Rightarrow \delta n_1 > 59$ et $N = 100000 \Rightarrow \delta n_1 > 588$.

Comme $\bar{n} = \frac{N}{2}$ et que nous nous sommes placés dans l'hypothèse $\delta n_1 \ll \bar{n}$, on a alors $\frac{2\,\delta n_1}{N} = 0{,}118$ pour $N = 1000$ et $\frac{2\,\delta n_1}{N} = 0{,}0118$ pour $N = 100000$ pour $P(\bar{n}+\delta n_1) = 0{,}001$. Donc plus N est grand, plus l'hypothèse de départ est vérifiée et moins l'écart à la moyenne est probable, autrement dit moins les fluctuations sont de grande amplitude.

7/ Comme $\delta n_1 = n_1 - \bar{n}$, $\ln P(\bar{n}+\delta n_1) = \ln P(n_1)$ et donc

$$P(n_1) = \exp\left[-\frac{2}{N}\delta n_1^2 - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\pi N}{2}\right)\right] = \exp\left[-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\pi N}{2}\right)\right]\exp\left(-\frac{2}{N}\delta n_1^2\right)$$

et finalement $\boxed{P(n_1) = \sqrt{\frac{2}{\pi N}}\exp\left[-\frac{2(n_1-\bar{n})^2}{N}\right]}$.

8/ $$\langle (n_1-\bar{n})\rangle = \sum_{n_1=0}^{N}(n_1-\bar{n})P(n_1) = \sum_{n_1=0}^{N} n_1 P(n_1) - \bar{n}\sum_{n_1=0}^{N}P(n_1) = \bar{n} - \bar{n}\times 1$$

et donc $\boxed{\langle (n_1-\bar{n})\rangle = 0}$.

$$\langle (n_1-\bar{n})^2\rangle = \sum_{n_1=0}^{N}(n_1-\bar{n})^2 P(n_1) = \sum_{n_1=0}^{N}(n_1-\bar{n})^2\sqrt{\frac{2}{\pi N}}\exp\left[-\frac{2(n_1-\bar{n})^2}{N}\right].$$

Pour N suffisamment grand, on a alors :

$$\langle (n_1-\bar{n})^2\rangle = \sqrt{\frac{2}{\pi N}}\int_{-\bar{n}}^{N-\bar{n}} x^2 e^{-\frac{2x^2}{N}}dx \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi N}}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{2x^2}{N}}dx,$$ en posant $x = n_1 - \bar{n}$.

et en ayant en tête que $N - \bar{n} = \bar{n} = \frac{N}{2}$, soit presque $+\infty$ quand N est grand.

Donc $$\langle (n_1-\bar{n})^2\rangle \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi N}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(-\frac{N}{4}x\right)\left(-\frac{4}{N}x e^{-\frac{2x^2}{N}}\right)dx \overset{*}{=} \sqrt{\frac{2}{\pi N}}\left\{\underbrace{\left[-\frac{N}{4}x e^{-\frac{2x^2}{N}}\right]_{-\infty}^{+\infty}}_{=0} + \frac{N}{4}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{2x^2}{N}}dx}_{\sqrt{\pi N/2}}\right\}$$

et finalement $\boxed{\langle (n_1-\bar{n})^2\rangle = \frac{\bar{n}}{2}}$.

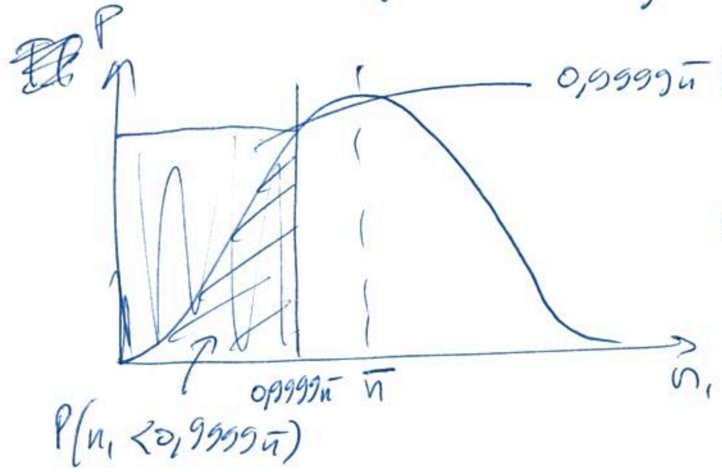
* On intègre par partie en posant

$$\begin{cases} u = -\frac{N}{4}x \\ dv = -\frac{4}{N}x e^{-\frac{2x^2}{N}}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\frac{N}{4}dx \\ v = e^{-\frac{2x^2}{N}} \end{cases}$$

soit $I = [uv] - \int v\,du$

9°/ 1 mole de GP $\Rightarrow N = 6{,}02.10^{23}$ et $\bar{n} = 3{,}01.10^{23}$.

On cherche $P(n_1 < 0{,}9999\bar{n})$, soit $P = \sum_{0}^{0{,}9999\bar{n}} P(n_1) = \int_{0}^{0{,}9999\bar{n}} \sqrt{\frac{2}{\pi N}}\, e^{-\frac{2}{N}(n_1-\bar{n})^2}\, dn_1$.



$\Rightarrow P(n_1 < 0{,}9999\bar{n}) < 0{,}9999\bar{n}\, P(0{,}9999\bar{n})$

Soit $P(n_1 < 0{,}9999\bar{n}) < 0{,}9999\bar{n} \sqrt{\frac{2}{\pi N}}\, e^{-\frac{2}{N} 10^{-8} \bar{n}^2}$

$P(n_1 < 0{,}9999\bar{n}) < 0{,}9999\bar{n} \sqrt{\frac{2}{\pi N}}\, e^{-10^{-8} \bar{n}}$

Finalement $P(n_1 < 0{,}9999\bar{n}) < 0{,}9999 \sqrt{\frac{\bar{n}}{\pi}}\, e^{-10^{-8}\bar{n}}$

soit $P(n_1 < 0{,}9999\bar{n}) < 0{,}9999\, e^{\frac{1}{2}\ln\frac{\bar{n}}{\pi} - 10^{-8}\bar{n}} \simeq 0{,}9999\, e^{-3.10^{15}} \underline{\simeq 0}$

Pour 1 mole de GP, les deux sous-volumes ont donc le même nombre de particules.

⚠ En fait, la distribution est quasiment un Dirac en $\frac{N}{2}$ mais dessin exagérément éloigné de la réalité pour les besoins de l'explication !