

Travaux dirigés d'Optique

Licence 3 / Magistère 1 Physique Fondamentale
ENS Paris-Saclay
Université Paris-Saclay

Enseignants TD :

*Elizabeth Boer-Duchemin, Elsa Ducrot, Nikos Fayard, Ségolène Guilbaud,
Rodrigo Gutierrez-Cuevas, Léa Lachaud, Dana-Codruta Marinica/Bruno Lucas*

TD1 - Réflexion et transmission aux interfaces

Exercice - Réflexion totale, onde evanescente, effet Goos-Hänchen

On considère une onde plane progressive monochromatique, de pulsation ω , qui arrive sous incidence oblique à l'interface plane entre deux milieux. Les milieux sont des diélectriques linéaires, homogènes, isotropes et non-magnétiques, de permittivités diélectriques relatives ε_{r1} (milieu situé dans le demi-espace $z < 0$) et ε_{r2} (milieu situé dans le demi-espace $z > 0$). On néglige la dissipation des ondes électromagnétiques dans ces milieux ($\varepsilon_{r1}, \varepsilon_{r2}$ sont des grandeurs réelles) ainsi que la dispersion et on suppose $\varepsilon_{r1} > \varepsilon_{r2}$. Les densités surfaciques de charges et de courants libres dans le plan de l'interface sont nulles.

Le plan d'incidence correspond au plan (xOz) et la direction de propagation de l'onde incidente est repérée par l'angle θ_i par rapport à la normale à la surface. On se place dans le cas d'une polarisation parallèle au plan d'incidence (polarisation "p" ou "TM"). L'onde incidente engendre à l'interface une onde réfléchie et une onde transmise. On considère les champs magnétiques des ondes incidente, réfléchie et transmise ($\vec{H}_i, \vec{H}_r, \vec{H}_t$) sous la forme :

$$\vec{H}_\alpha(\vec{r}, t) = -\mathcal{H}_{0\alpha} \exp[i(\vec{k}_\alpha \cdot \vec{r} - \omega t)]\vec{u}_y + c.c. \quad \alpha = i, r, t$$

où $\mathcal{H}_{0\alpha}$ est l'amplitude complexe et $\vec{k}_\alpha$ le vecteur d'onde de l'onde α . On a $|\vec{k}_i| = |\vec{k}_r| = n_1 k_0$ et $|\vec{k}_t| = n_2 k_0$, où n_1 et n_2 sont les indices des milieux et $k_0 = \frac{\omega}{c}$, avec c vitesse de la lumière dans le vide. Pour l'onde incidente, on pose $\vec{k}_i = k_x \vec{u}_x + k_{i,z} \vec{u}_z$.

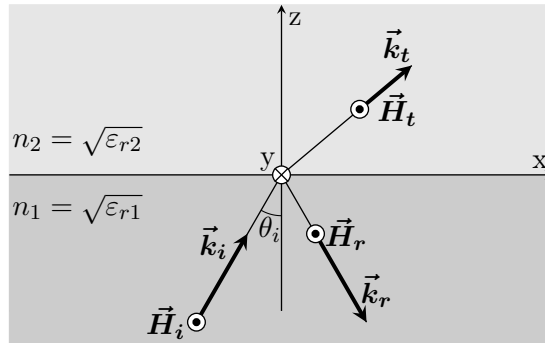


FIGURE 1 – Réflexion et transmission d'une onde plane à l'interface entre deux diélectriques, polarisation "TM" ou "p"

Partie I : Relations de passage, coefficients de Fresnel

1. Exprimer les champs électriques $\vec{E}_i(\vec{r}, t)$, $\vec{E}_r(\vec{r}, t)$ et $\vec{E}_t(\vec{r}, t)$ associés aux trois ondes en fonction des données du problème.

2. Écrire les conditions de passage pour les composantes tangentielles des champs $\vec{E}$ et $\vec{H}$ à l'interface en $z = 0$.
3. En déduire que la composante parallèle à l'interface des vecteurs d'onde $\vec{k}_i$, $\vec{k}_r$, $\vec{k}_t$ est la même (k_x). Exprimer les composantes perpendiculaires à l'interface des vecteurs d'ondes ($k_{i,z}$, $k_{r,z}$ et $k_{t,z}$) en fonction de k_x et des modules des vecteurs d'onde. Quelle est la relation entre $k_{r,z}$ et $k_{i,z}$?
4. On définit les coefficients complexes de réflexion et de transmission en amplitude (pour le champ H) pour la polarisation "p" considérée par : $r_H^p = \left[\frac{\mathcal{H}_{0r}}{\mathcal{H}_{0i}} \right]_p$ et $t_H^p = \left[\frac{\mathcal{H}_{0t}}{\mathcal{H}_{0i}} \right]_p$. À partir des deux relations de continuité de la question 2, montrer que ces coefficients sont sous la forme :

$$r_H^p = \frac{\varepsilon_{r2}k_{i,z} - \varepsilon_{r1}k_{t,z}}{\varepsilon_{r2}k_{i,z} + \varepsilon_{r1}k_{t,z}} \quad t_H^p = \frac{2\varepsilon_{r2}k_{i,z}}{\varepsilon_{r2}k_{i,z} + \varepsilon_{r1}k_{t,z}}$$

Partie II : Réflexion totale, transport d'énergie par ondes évanescentes, effet Goos-Hänchen

1. Montrer que pour un angle d'incidence $\theta_i > \theta_{lim}$, où $\theta_{lim} = \arcsin(\frac{n_2}{n_1})$, la composante $k_{t,z}$ est purement imaginaire : $k_{t,z} = \pm \frac{i}{\delta}$, avec $\delta = (k_x^2 - n_2^2 k_0^2)^{-1/2}$. Pour la suite de l'exercice, on va se placer dans le cas où $\theta_i > \theta_{lim}$ (réflexion totale).
2. Expliciter la solution $\vec{H}_t(\vec{r}, t)$. Quel doit être le signe de $\Im m(k_{t,z})$ pour que la solution soit physique ? Caractériser l'onde transmise. Donner une interprétation physique pour δ .
Application numérique : Calculer le rapport δ/λ_0 , où λ_0 est la longueur d'onde d'une onde lumineuse dans le vide, dans le cas d'une interface verre/air pour un angle d'incidence $\theta_i = 45^\circ$. On donne $n_{verre} = 1.5$ et $n_{air} = 1$.
3. On écrit le coefficient de réflexion complexe sous la forme : $r_H^p = |r_H^p| \exp(-2i\phi)$. Déterminer $|r_H^p|$ et ϕ en fonction de θ_i et des indices des milieux. Que vaut le coefficient de réflexion en énergie R ?
4. Déterminer la moyenne temporelle des composantes suivant x et z du vecteur de Poynting de l'onde transmise. Interpréter le résultat.

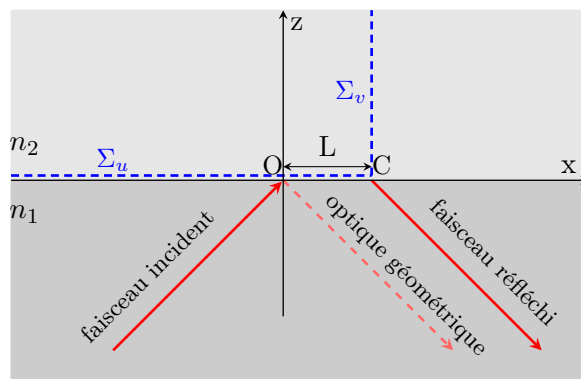


FIGURE 2 – Déplacement Goos-Hänchen

5. Le déphasage 2ϕ de l'onde réfléchie par rapport à l'onde incidente est à l'origine de l'effet Goos-Hänchen. *En 1947, Hermann Goos et Hilda Hänchen ont mis en évidence un déplacement longitudinal d'un faisceau lumineux polarisé linéairement lors de la réflexion totale : comme dans l'image des poissons volants, le point d'incidence (celui où les poissons sortent de l'eau) n'est pas identique au point de réflexion (où ils regagnent leur milieu initial).* On note L le déplacement Goos-Hänchen (voir Figure 2). On se propose dans la suite de cette partie d'estimer ce déplacement par deux méthodes : la conservation du flux d'énergie et la description d'un faisceau limité par une superposition d'ondes planes.

5.A) On considère un faisceau laser incident, d'extension latérale finie, qui subit une réflexion totale à l'interface. On suppose que les champs électrique et magnétique près du centre du faisceau sont bien décrits par ceux d'une onde plane. Déterminer le flux moyen d'énergie Φ_{Σ_v} à travers la surface $\vec{\Sigma}_v = \Sigma_v \vec{u}_x$ (Σ_v est dans le plan $x = x_C$, délimitée par $z = 0$, $z = \infty$, $y = -\Delta y/2$ et $y = \Delta y/2$). La conservation de l'énergie implique un flux moyen d'énergie net Φ_{Σ_u} à travers la surface $\vec{\Sigma}_u = \Sigma_u \vec{u}_z$ (Σ_u est dans le plan $z = 0$, délimitée par $x = -\infty$, $x = x_C$, $y = -\Delta y/2$ et $y = \Delta y/2$). On suppose que Δy et $(x_C - x_O)$ sont bien inférieures à la taille latérale du faisceau laser. Montrer que pour que Φ_{Σ_u} soit non-nul, il faut que le faisceau réfléchi soit décalé par rapport au faisceau incident. Déterminer L .

5.B) *Cette partie est facultative*

On considère un faisceau laser comme une superposition d'ondes planes dont les amplitudes complexes dépendent de l'angle d'incidence θ_i par l'intermédiaire d'une fonction $\mathcal{A}(\theta_i)$. Le champ $\vec{H}_i(\vec{r}, t)$ de l'onde incidente résultante peut alors s'écrire :

$$\vec{H}_i(\vec{r}, t) = \int_{\theta_0 - \Delta\theta/2}^{\theta_0 + \Delta\theta/2} \mathcal{A}(\theta_i) \exp[i(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega t)] d\theta_i \vec{u}_y + c.c.$$

On suppose que le faisceau laser est très peu divergent ($\Delta\theta \ll \theta_0$).

5.B.1) Montrer que $\vec{H}_i$ peut s'écrire, au niveau de l'interface ($z = 0$), sous la forme :

$$\vec{H}_i(x, z = 0, t) = \alpha_{\theta_0} \vec{u}_y \int_{-\Delta\theta/2}^{\Delta\theta/2} \mathcal{A}(\theta_0 + \eta) \exp(in_1 k_0 \cos \theta_0 x \eta) d\eta + c.c.$$

où $\alpha_{\theta_0} = \exp[in_1 k_0 x \sin \theta_0 - \omega t]$

5.B.2) En supposant que le faisceau incident subit une réflexion totale ($\theta_0 > \theta_{lim}$) et en utilisant l'expression du coefficient complexe r_H^p de la question II.3, montrer que le champ magnétique réfléchi, au niveau de l'interface, peut s'écrire sous la forme :

$$\vec{H}_r(x, z = 0, t) = \alpha_{\theta_0} e^{-2i\phi(\theta_0)} \vec{u}_y \int_{-\Delta\theta/2}^{\Delta\theta/2} \mathcal{A}(\theta_0 + \eta) \exp[i(x - x_0)n_1 k_0 \cos \theta_0 \eta] d\eta + c.c.$$

Exprimer x_0 en fonction de $\phi'(\theta_0)$, n_1 , n_2 , k_0 et θ_0 . Quelle est l'interprétation physique de x_0 ? Déterminer x_0 en fonction de n_1 , n_2 , λ_0 et θ_0 .

Application numérique : Calculer x_0 pour l'interface verre/air pour $\theta_0 = 45^\circ$ et $\lambda_0 = 700 \text{ nm}$. Conclure.

TD2 - Ondes planes : cavités Fabry-Perot et miroir multi-couche

Exercice 1 - Cavité Fabry-Perot

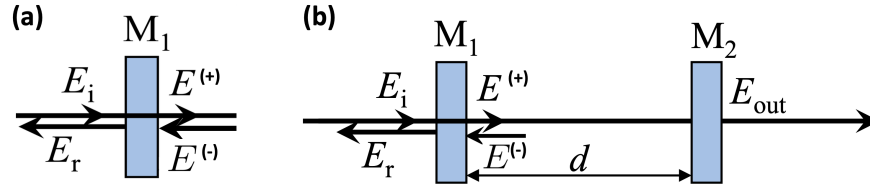


FIGURE 1 – Cavité Fabry-Perot.

On considère la cavité Fabry-Perot de longueur d de la figure 1(b), constituée de deux miroirs M_1 et M_2 , de coefficients de réflexion et transmission en amplitudes (supposés réels) internes à la cavité notés r_1, r_2, t_1, t_2 . On éclaire ce Fabry-Perot par une onde plane monochromatique dont le champ est :

$$E_i(\mathbf{r}, t) = \mathcal{E}_i e^{-i(\omega t - kz)} + \text{c.c.}, \quad (1)$$

où $k = 2\pi\nu/c$ et où $\mathcal{E}_i$ est l'amplitude complexe. On note de la même manière $E^{(+)}$, $E^{(-)}$, E_r et E_{out} les champs dans et aux sorties de la cavité.

1. Commençons par étudier le rôle du miroir M_1 représenté en figure 1(a). Exprimer $\mathcal{E}^{(+)}$ en fonction de $\mathcal{E}^{(-)}$, $\mathcal{E}_i$, t_1 et r_1 .
2. On ajoute maintenant le miroir M_2 et on suppose que la cavité est en régime stationnaire. Exprimer $\mathcal{E}^{(-)}$ en fonction de $\mathcal{E}^{(+)}$ et des paramètres de la cavité.
3. En déduire $\mathcal{E}^{(+)}$ en fonction de $\mathcal{E}_i$.
4. Retrouver ce résultat en supposant que $E^{(+)}$ est la somme des réflexions successives dans la cavité.
5. En déduire $\mathcal{E}_{\text{out}}$ et $\mathcal{E}_r$.
6. On note

$$\mathcal{T} = \left| \frac{\mathcal{E}_{\text{out}}}{\mathcal{E}_i} \right|^2. \quad (2)$$

Montrer que $\mathcal{T}$ se met sous la forme

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\text{max}} \frac{1}{1 + m \sin^2 kd}. \quad (3)$$

7. Pour quelles fréquences la cavité est-elle résonante ($\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\text{max}}$) ?
8. Dessiner l'allure du champ dans la cavité à résonance.

9. Tracer $\mathcal{T}$ en fonction de ν . On suppose que les miroirs sont identiques et parfaits : $r_1 = r_2 = \sqrt{R}$ et $T = t_1^2 = t_2^2 = 1 - R$.
10. On suppose $T \ll 1$. Que vaut la largeur à mi-hauteur $\Delta\nu$ d'une résonance ? Calculer la finesse $\mathcal{F}$, c'est-à-dire le rapport entre l'écart entre deux résonances (intervalle spectral libre) et $\Delta\nu$.
11. Que vaut l'intensité de l'onde intra-cavité à résonance ?
12. Application numérique : $T = 10^{-5}$ et $d = 1$ m. Calculer $\Delta\nu$, $\mathcal{F}$ et la surtension de la cavité.
13. Que vaut le coefficient de réflexion $\mathcal{R} = \left| \frac{\mathcal{E}_r}{\mathcal{E}_i} \right|^2$ de la cavité à résonance ? Tracer $\mathcal{R}$ en fonction de ν .
14. Tracer $\mathcal{T}$ et $\mathcal{R}$ en fonction de ν dans le cas général de miroirs différents et imparfaits.

Exercice 2 - Miroir multi-couche diélectrique

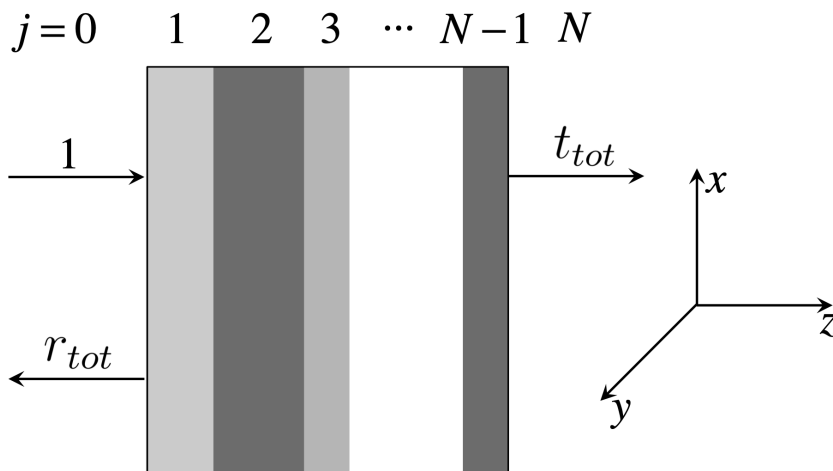


FIGURE 2 – Structure multi-couche.

Considérons la structure composée de $N + 1$ couches planes diélectriques empilées perpendiculairement à l'axe z représentée sur la figure 2. La première couche $j = 0$ est en fait le milieu de gauche qui s'étend depuis $z = -\infty$, et la dernière couche $j = N + 1$ est le milieu de droite qui s'étend jusqu'à $z = +\infty$. Par souci de simplicité, nous considérons une onde incidente depuis $z = -\infty$ polarisée selon x et arrivant à incidence normale. Notre but est de calculer la transmission t_{tot} et la réflectivité r_{tot} de la structure.

La couche j (voir la figure 3) a un indice de réfraction n_j et une épaisseur d_j . Les champs électrique et magnétique s'y propagent dans les deux sens, avec les polarisations symbolisées par les trièdres de la figure 3. Nous repérons les champs dans la couche j par leurs amplitudes complexes $\mathcal{E}_j^+$, $\mathcal{E}_j^-$, $\mathcal{H}_j^+$ et $\mathcal{H}_j^-$ prises à droite de la couche.

1. Rappeler les conditions de raccordement des champs à l'interface entre deux milieux diélectriques 1 et 2.

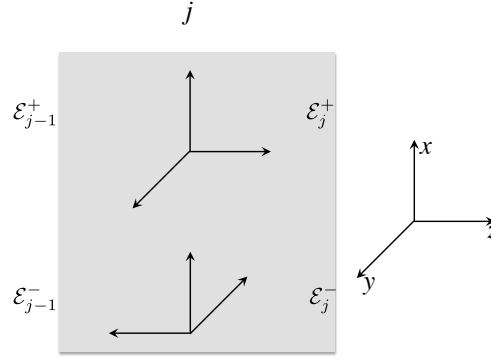


FIGURE 3 – Une des couches de l’empilement de la figure 2.

2. En déduire les relations entre les amplitudes complexes $\mathcal{E}_{j-1}^\pm$, $\mathcal{E}_j^\pm$, $\mathcal{H}_{j-1}^\pm$ et $\mathcal{H}_j^\pm$ des champs. On introduit le déphasage accumulé à la traversée de la couche j :

$$\phi_j = n_j \frac{\omega}{c} d_j . \quad (4)$$

3. En utilisant l’impédance Z_j du milieu j , en déduire la matrice de transfert M_j de la couche j :

$$\begin{pmatrix} \mathcal{E}_{j-1} \\ \mathcal{H}_{j-1} \end{pmatrix} = M_j \begin{pmatrix} \mathcal{E}_j \\ \mathcal{H}_j \end{pmatrix} . \quad (5)$$

4. En déduire la matrice de transfert M pour toute la structure multi-couche :

$$\begin{pmatrix} \mathcal{E}_0 \\ \mathcal{H}_0 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \mathcal{E}_N \\ \mathcal{H}_N \end{pmatrix} , \quad (6)$$

5. On se place dans le cas schématisé en figure 2 où on n’envoie un champ que du côté gauche :

$$\mathcal{E}_0^+ = 1 , \quad (7)$$

$$\mathcal{E}_0^- = r_{tot} , \quad (8)$$

$$Z_0 \mathcal{H}_0^+ = 1 , \quad (9)$$

$$Z_0 \mathcal{H}_0^- = -r_{tot} , \quad (10)$$

$$\mathcal{E}_N^+ = t_{tot} , \quad (11)$$

$$\mathcal{E}_N^- = 0 , \quad (12)$$

En déduire une relation matricielle impliquant les coefficients de réflexion r_{tot} et transmission t_{tot} en amplitude.

6. Application au miroir de Bragg

Nous appliquons ce formalisme des matrices de transfert à une situation particulièrement importante du point de vue des applications, celle du miroir de Bragg.

Un tel miroir consiste en p paires identiques de couches de deux matériaux d’indices n_A et n_B et d’épaisseurs d_A et d_B , respectivement. Le but d’un miroir de Bragg est d’optimiser la réflectivité. Or on a vu en cours que le coefficient de réflexion à

l'interface séparant le milieu A du milieu B est $\frac{n_A - n_B}{n_A + n_B}$. En inversant A et B, on voit que la réflexion sur l'interface suivante est déphasée de π . Si on veut par conséquent que les ondes réfléchies par toutes les interfaces interfèrent constructivement, il faut que la propagation le long d'un aller-retour dans chaque couche corresponde aussi à un changement de signe, c'est-à-dire que ϕ_A et ϕ_B , définis par (4) soient tous les deux des multiples impairs de $\pi/2$.

Supposons dans un premier temps que les deux couches de chaque paire ont même épaisseur optique, c'est-à-dire :

$$\phi \equiv \phi_A = \phi_B . \quad (13)$$

Réécrire la matrice M .

7. On prend $\phi = \pi/2$ (couches "d'épaisseur quart d'onde") et $Z_0 = Z_N$. En déduire r_{tot} . Que se passe-t-il quand $p \gg 1$?

TD3 - Propagation d'une impulsion dans un milieu dispersif. Relations de Kramers-Kronig

Exercice 1 - Propagation d'une impulsion dans un milieu dispersif

On considère la propagation le long d'un axe Oz d'une impulsion lumineuse de profil temporel gaussien avec une fréquence centrale ω_p . L'onde est plane. Le milieu est linéaire, homogène et isotrope, décrit par un indice de réfraction $n(\omega)$. La dispersion est caractérisée par un coefficient de dispersion de délai de groupe β_2 . Le champ, polarisé selon la direction Ox , est noté $E(z, t)$. A l'entrée du milieu il présente un "chirp" en fréquence C_0 :

$$E(z=0, t) = E^{(+)}(z=0, t) + c.c. = E_0 e^{-\frac{1+iC_0}{2} \frac{t^2}{\Delta t_0^2}} e^{-i\omega_p t} + c.c. . \quad (1)$$

On définit les transformées de Fourier $E^{(+)}(z, \omega)$ et $D^{(+)}(z, \omega)$ par :

$$E^{(+)}(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega E^{(+)}(z, \omega) e^{-i\omega t} \quad (2)$$

$$D^{(+)}(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega D^{(+)}(z, \omega) e^{-i\omega t} . \quad (3)$$

On donne les intégrales valables pour σ complexe :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2 \sigma^2} e^{iuv} du = \frac{\sqrt{\pi}}{\sigma} e^{-\frac{v^2}{4\sigma^2}} . \quad (4)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{(u + i\alpha)^2}{\sigma^2} \right] du = \sqrt{\pi} \sigma , \quad (5)$$

1. Tracer l'intensité lumineuse en $z=0$ en fonction du temps.
2. Calculer le spectre de l'impulsion $E^{(+)}(z=0, \omega)$ et la densité spectrale de puissance $|E^{(+)}(z=0, \omega)|^2$. Que vaut sa largeur ? Commentez ce résultat.
3. Ecrire l'équation de propagation reliant les champs $\mathbf{E}(z, t)$ et $\mathbf{D}(z, t)$ dans le milieu. On notera que, pour une onde plane dans un milieu linéaire homogène isotrope sans charges, $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$.
4. Donner l'équation de propagation sur $E^{(+)}(z, \omega)$ en fonction de $k(\omega) = n(\omega) \frac{\omega}{c}$ et en déduire son expression en fonction de $E^{(+)}(z=0, \omega)$. L'impulsion se déplace vers les $z > 0$.
5. Faire un développement de Taylor de $k(\omega)$ autour de ω_p en introduisant la vitesse de groupe v_g et β_2 . Calculer alors $E^{(+)}(z, t)$. On ignorera toutes les constantes multiplicatives.
6. Donner l'expression de la largeur temporelle de l'impulsion $\Delta t(z)$ en fonction de Δt_0 , C_0 et β_2 .

7. Discuter l'évolution de la largeur $\Delta t(z)$ pour $C_0 = 0$, $C_0\beta_2 > 0$ et $C_0\beta_2 < 0$?
8. Pour $C_0\beta_2 < 0$, calculer la distance $z_{\min}$ qui minimise la largeur de l'impulsion ainsi que la largeur correspondante.
9. On prend une impulsion à une longueur d'onde télécom 1550 nm, de largeur initiale $\Delta t_0 = 100$ fs avec $C_0 = 3$. Quelle longueur de fibre avec $\beta_2 = -0.02$ ps²/m doit-on utiliser pour comprimer l'impulsion et quelle est alors sa largeur ?

Exercice 2 - Relation de Kramers-Kronig

On considère une vapeur atomique confinée dans une cellule d'épaisseur L . On envoie un laser continu (vecteur d'onde dans le vide k , fréquence ω) et on mesure sa transmission à travers la cellule. La vapeur est décrite par une susceptibilité $\chi(\omega) = \chi'(\omega) + i\chi''(\omega)$ et un indice de refraction $n(\omega)$. La fréquence du laser est proche de celle d'une résonance atomique ω_0 .

1. Rappeler la relation entre l'indice n et la susceptibilité χ .
2. On supposera que $|\chi| \ll 1$. Exprimer n en fonction de χ' et χ'' .
3. Le champ électrique à l'entrée de la cellule a une amplitude E_0 . Calculer le champ à la sortie et en déduire la transmission en intensité T .
4. Donner l'expression de χ'' en fonction T , k et L .
5. Souvent, χ'' peut se mettre sous la forme d'une lorentzienne :

$$\chi'' = \frac{A}{1 + 4 \frac{(\omega - \omega_0)^2}{\Gamma^2}} . \quad (6)$$

Utiliser la relation de Kramers-Kronig

$$\chi'(\omega) = -\frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi''(\omega')}{\omega - \omega'} d\omega' \quad (7)$$

pour en déduire la partie réelle de l'indice de réfraction. Utiliser

$$\mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+u^2} \frac{1}{B-u} du = \frac{\pi B}{1+B^2} .$$

6. Proposer une méthode interférométrique indépendante pour mesurer $\chi'(\omega)$ et ainsi vérifier la relation de Kramers-Kronig.

TD4 - Diffraction en ondes planes, étude de l'effet Talbot

Exercice - Effet Talbot

Partie I

Lorsqu'un réseau est éclairé par un faisceau cohérent, son image se reproduit de manière exacte et périodique, à différentes positions le long de l'axe de propagation z , et ce sans qu'il y ait besoin d'utiliser la moindre lentille. L'objet de cet exercice est de modéliser ce phénomène. La propagation se fait dans le vide. Nous nous plaçons dans le cadre de l'approximation scalaire. Une onde plane, monochromatique, de fréquence ω_0 (et de longueur d'onde λ_0) se propage dans la direction (Oz) , dans le sens des z croissants. Son champ électrique s'écrit :

$$E(\mathbf{r}, t) = \mathcal{E}_0 e^{-i(\omega_0 t - k_0 z)} + \text{c.c.} , \quad (1)$$

où $k_0 = 2\pi/\lambda_0$. Elle éclaire un réseau d'amplitude placé dans le plan $z = 0$, supposé d'épaisseur nulle, dont la transmission est modulée sinusoïdalement avec un pas p . La transmittance du réseau s'écrit :

$$t(x, y) = \frac{1}{2} \left(1 + m \cos \left[\frac{2\pi x}{p} \right] \right) . \quad (2)$$

1. Que vaut la transformée de Fourier temporelle du champ incident de l'équation (1), définie par la formule suivante :

$$E(\mathbf{r}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} E(\mathbf{r}, t) . \quad (3)$$

Dans la suite, on notera $E_0(\omega)$ la valeur de $E(\mathbf{r}, \omega)$ en $z = 0^-$, juste avant le réseau.

2. Que vaut le champ $E(x, y, z = 0^+, \omega)$ juste après la traversée du réseau ?
3. Calculer le spectre d'ondes planes $E(k_x, k_y, z = 0^+, \omega)$ du champ de la question précédente. On rappelle la définition de la transformée de Fourier spatiale 2D :

$$E(k_x, k_y, z, \omega) = \iint dx dy e^{-i(k_x x + k_y y)} E(\mathbf{r}, \omega) . \quad (4)$$

4. En déduire $E(k_x, k_y, z, \omega)$, le spectre d'ondes planes du champ à une distance $z > 0$ derrière le réseau, puis le champ $E(x, y, z, \omega)$.
5. En déduire l'intensité $I(x, y, z)$ de l'onde dans le plan z en fonction de l'intensité I_0 de l'onde incidente.
6. A quelle(s) distance(s) z_q cette intensité reproduit-elle une image parfaite du réseau placé dans le plan $z = 0$? On pourra simplifier le résultat en supposant dans toute la suite que $p \gg \lambda_0$.
7. Donner la (les) valeur(s) numérique(s) de z_q pour $p = 0,1 \text{ mm}$ et $\lambda_0 = 0,5 \text{ }\mu\text{m}$.
8. A quelle(s) distance(s) z'_q l'intensité $I(x, y)$ donne-t-elle une image en contraste inversé du réseau ?

9. Existe-t-il un ou des plans z_q'' dans lesquels $I(x, y)$ donne une image de fréquence spatiale double du réseau ?
10. Le réseau est toujours unidimensionnel, d'axe x , et *périodique* de pas p . Par contre, il n'est plus sinusoïdal ; le motif du réseau est quelconque. Obtient-on toujours des auto-images ?

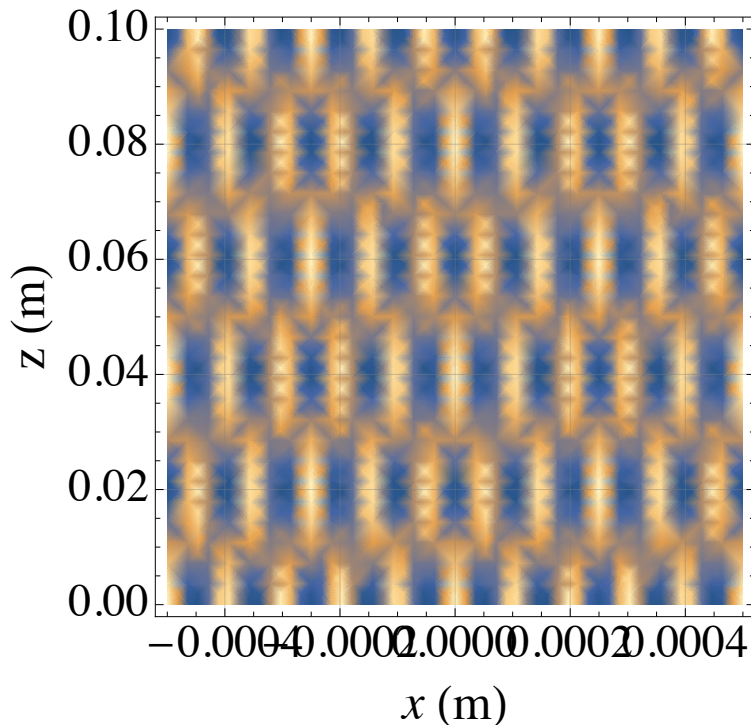


FIGURE 1 – Effet Talbot

Partie II : Validité de l'approximation de Fraunhofer

On souhaite maintenant comparer le résultat obtenu précédemment à celui qu'on obtient en utilisant l'approximation de Fraunhofer pour le calcul du champ diffracté. On rappelle l'expression du champ diffracté à l'approximation de Fraunhofer :

$$E(x, y, z, \omega) = -\frac{ik}{2\pi} E \left(k_x = \frac{kx}{z}, k_y = \frac{ky}{z}, z = 0, \omega \right) \frac{e^{ikr}}{r} . \quad (5)$$

1. Appliquer cette formule au calcul du champ $E(x, y, z, \omega)$ résultant de la diffraction de l'onde plane par le réseau, comme dans la section précédente.
2. Comparer ce résultat avec celui obtenu dans la partie précédente. Commenter et expliquer.
3. Comment peut-on réconcilier les deux approches ?

TD5 - Diffraction de Fresnel ; filtrage spatial

Exercice - Imagerie de contraste de phase

On considère le système optique représenté sur la figure 1. Il s'agit d'un système de filtrage spatial $4f$ comme nous avons vu en cours. La lumière, monochromatique de fréquence ω , arrive de la gauche et se propage le long de l'axe z . Elle part du plan de départ A , passe la première lentille mince de focale $f > 0$, arrive dans le plan de Fourier D , puis traverse la seconde lentille identique à la première avant d'arriver sur l'écran d'observation. On néglige dans tout le problème la dimension transverse y . Les distances entre les différents plans et les lentilles sont toutes égales à f , comme indiqué dans le haut de la figure.

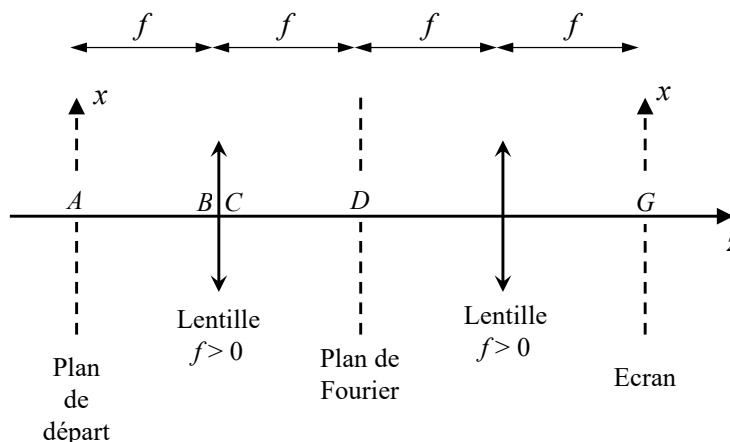


FIGURE 1 – Système de filtrage spatial $4f$.

On représente les champs, supposés scalaires, en notation complexe. Par exemple, le champ incident dans le plan de départ s'écrit

$$E_A(x, t) = \mathcal{E}_A(x)e^{-i\omega t} + c.c. , \quad (1)$$

où $\mathcal{E}_A(x)$ est l'amplitude complexe du champ dans le plan A .

On donne la transmission d'une lentille mince de focale f pour l'amplitude complexe du champ :

$$t_f(x) = \exp\left(-i\frac{kx^2}{2f}\right) , \quad (2)$$

où $k = \omega/c$.

1. En présence d'une seule dimension transverse x , le propagateur pour une distance z pour la diffraction à l'approximation de Fresnel est donné dans l'espace réciproque (l'espace des k_x) par :

$$h_{Fresnel}(k_x, z) = e^{ikz} \exp\left(-i\frac{z}{2k}k_x^2\right) . \quad (3)$$

Montrer, en utilisant la transformée de Fourier d'une gaussienne, que sa transformée de Fourier s'écrit

$$h_{Fresnel}(x, z) = H e^{ikz} \exp\left(i \frac{k}{2z} x^2\right), \quad (4)$$

où on exprimera H en fonction de la longueur d'onde λ et de z .

2. On note B le plan situé juste avant la première lentille. Exprimer la transformée de Fourier $\mathcal{E}_B(k_x)$ de l'amplitude complexe du champ en B en fonction de celle $\mathcal{E}_A(k_x)$ du champ de départ.
3. Exprimer l'amplitude complexe $\mathcal{E}_C(x)$ du champ juste après la lentille en fonction de $\mathcal{E}_B(x)$.
4. En déduire l'expression de l'amplitude complexe $\mathcal{E}_D(x)$ du champ dans le plan de Fourier en fonction de la transformée de Fourier $\mathcal{E}_B(k_x)$ de l'amplitude du champ juste avant la lentille.
5. En utilisant le résultat de la question 2.2, trouver l'expression de l'amplitude complexe $\mathcal{E}_D(x)$ du champ dans le plan de Fourier en fonction de la transformée de Fourier $\mathcal{E}_A(k_x)$ de l'amplitude du champ de départ.
6. On suppose que l'amplitude complexe du champ de départ s'écrit

$$\mathcal{E}_A(x) = \mathcal{E}_0 e^{i\phi(x)}, \quad (5)$$

où le front d'onde est modulé sinusoïdalement avec une période p :

$$\phi(x) = \phi_0 \cos \frac{2\pi x}{p}. \quad (6)$$

Dans la suite on prend $p = 5 \mu\text{m}$, $\lambda = 0.5 \mu\text{m}$, $f = 0.1 \text{ m}$ et $\phi_0 = 10^{-2} \text{ rad} \ll 1 \text{ rad}$.

Faire un développement limité du front d'onde au deuxième ordre en ϕ_0 sous la forme :

$$e^{i\phi(x)} \simeq K + L \cos \frac{2\pi x}{p} + M \cos \frac{4\pi x}{p}. \quad (7)$$

On donnera les expressions de K , L et M en fonction de ϕ_0 et ϕ_0^2 .

7. En déduire $\mathcal{E}_A(k_x)$. On rappelle que $\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ik_x x} = 2\pi \delta(k_x)$.
8. On met un écran dans le plan de Fourier D . Faites un dessin de ce qu'on observe sur cet écran. Combien de taches ? Quelles sont les amplitudes de chacune de ces taches ? Donner les expressions et les valeurs numériques des positions des taches que vous prévoyez.
9. On enlève l'écran du plan de Fourier et on laisse la lumière se propager à travers la seconde lentille jusqu'à l'écran G qui est tout à droite de la figure 1. Quelle distribution d'intensité observe-t-on sur cet écran ?
10. On place maintenant dans le plan de Fourier D une fente de 3 cm de largeur centrée sur l'axe. Quelle est l'expression de l'amplitude $\mathcal{E}_G(x)$ du champ sur l'écran G ?
11. On note I_0 l'intensité de l'onde incidente dans le plan A . Calculer la distribution d'intensité $I_G(x)$ sur l'écran G et en déduire la période des franges d'interférence observées sur cet écran. Quel est leur contraste $\mathcal{C}$ défini par :

$$\mathcal{C} = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}. \quad (8)$$

Donner la valeur numérique du contraste.

12. On rajoute dans le plan de Fourier D , en plus de la fente, une lame déphasante de 1 mm de largeur (déphasage de $\pi/2$) de transmission $t = 10^{-1}$ en amplitude. Que deviennent les réponses à la question précédente (période et contraste des franges) ?
13. En quelques lignes, à quoi pensez-vous qu'un tel système puisse servir ?

TD6 : Propagation dans un milieu anisotrope uniaxe

Exercice 1 - lame à faces parallèles anisotrope

Une lame à faces parallèles est taillée dans un morceau de calcite (milieu uniaxe) de telle manière que l'axe optique AO fasse un angle de 45° avec la face d'entrée (voir la figure 1). Une onde plane monochromatique se propage dans la lame suivant une direction normale aux faces.

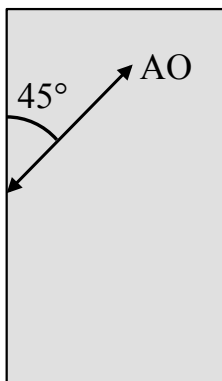


FIGURE 1 – lame de calcite.

1. Quelles sont les directions des lignes neutres de la lame ? Calculer les indices correspondants. On donne $n_o = 1.66$ et $n_e = 1.49$.
2. Représenter les directions des vecteurs $\mathbf{D}$, $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ ainsi que celle du rayon lumineux pour les deux ondes polarisées selon les lignes neutres.

Exercice 2 - Réfraction à l'interface entre l'air et un milieu anisotrope

On considère une lame anisotrope uniaxe à faces parallèles, taillée parallèlement à l'axe optique.

1. Une onde plane monochromatique est incidente sur la lame depuis l'air ($n = 1$) avec un angle d'incidence i . Sa direction de propagation dans l'air est orthogonale à l'axe optique de la lame. Construire, en utilisant la surface des indices, les directions de propagation dans la lame et calculer les angles de réfraction r_o et r_e associés.
2. Application numérique. On prendra $i = 45^\circ$ et $n_o = 1.544$ et $n_e = 1.553$ pour le quartz.
3. Même question si le plan d'incidence est parallèle à l'axe optique.

Exercice 3 - Double réfraction dans le spath d'Islande

On considère un cristal uniaxe de spath d'Islande, taillé à 45° de son axe optique et éclairé en incidence normale (voir la figure 2).

1. Rappeler quelles sont les directions de polarisation et les directions des vecteurs d'onde des ondes réfractées dans le cristal. Que deviennent ces directions quand la lumière ressort de l'autre côté du cristal ?

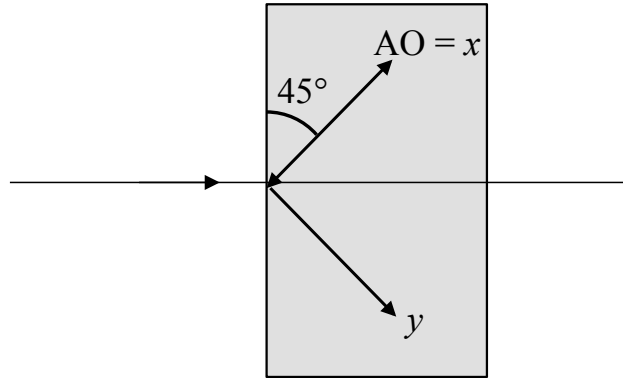


FIGURE 2 – Cristal de spath d’Islande taillé à 45° de son axe optique sur lequel la lumière est envoyée en incidence normale.

2. Déterminer les directions des rayons lumineux réfractés dans le cristal puis celles des rayons émergents. Quelle est la distance entre les rayons émergents du cristal d’épaisseur e ? On prendra $e = 5 \text{ cm}$, $n_o = 1.658$, $n_e = 1.486$.

TD7 - Polarisation de la lumière

Exercice 1 - Polariseur type Wollaston

- On considère un milieu uniaxe positif ($n_e > n_o > 1$), dont l'axe optique est orienté dans la direction x . Tracer les allures des sections de la surface des indices dans les plans $x = 0$, $y = 0$ et $z = 0$. Indiquez les valeurs des demi-axes.

Conseil : pour faire de jolis dessins, prenez 1 cm pour l'indice de l'air, 1,5 cm pour l'indice ordinaire et 2 cm pour l'indice extraordinaire.

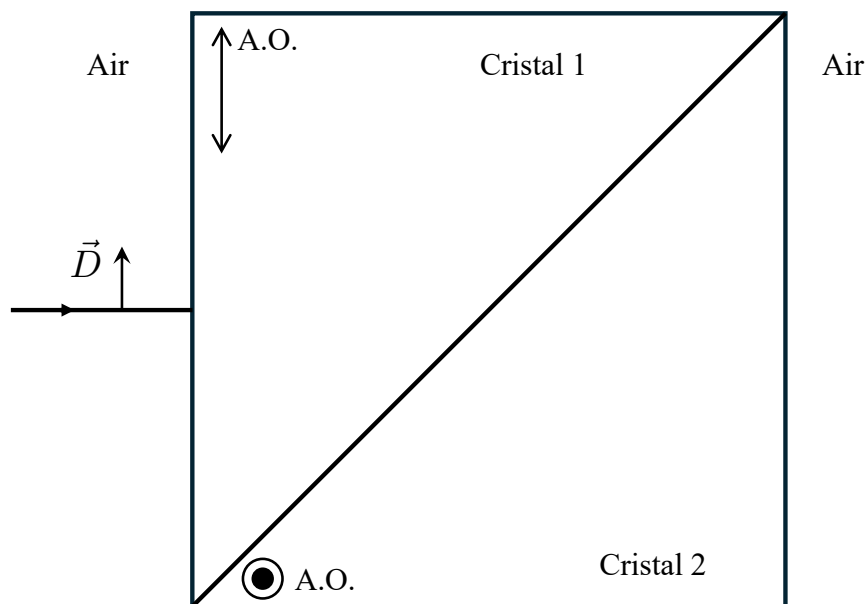


FIGURE 1 – Polariseur Wollaston

- On considère maintenant l'assemblage de deux prismes taillés dans ce même cristal, comme le montre la figure 1. L'angle des prismes est 45° . Les axes optiques des deux prismes sont orthogonaux. On souhaite tracer la propagation d'un rayon qui arrive depuis la gauche à incidence normale sur le premier cristal. On considère la polarisation incidente parallèle à la feuille.
 - Tracer les surfaces d'indice relatives à la polarisation considérée à l'interface entre l'air et le cristal 1, dans le but de faire une construction de Descartes.
 - En déduire la direction du vecteur $\mathbf{k}$ dans le cristal 1.
 - Prolonger la propagation jusqu'à l'interface avec le cristal 2, et faire à nouveau la construction de Descartes pour trouver la direction de $\mathbf{k}$ dans le cristal 2.
 - Prolonger la propagation jusqu'à l'interface avec l'air, et faire à nouveau la construction de Descartes pour trouver la direction de $\mathbf{k}$ dans l'air
 - Indiquer s'il s'agit d'un rayon ordinaire ou extraordinaire dans chaque cristal

- (f) Indiquer la direction du vecteur $\mathbf{D}$ dans chaque milieu
- (g) Calculer l'angle de déviation du rayon après le second cristal. On prendra $n_o = 1,5442$ et $n_e = 1,5533$.

Exercice 2 - Polarisation de la lumière dans une cavité - Ondes hélicoïdales stationnaires

Nous considérons une onde plane monochromatique se propageant selon z . Son champ électrique est :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{-i(\omega t - kz)} + \text{c.c.}, \quad (1)$$

où $\mathbf{E}_0$ est l'amplitude complexe vectorielle du champ qui s'écrit de la façon suivante dans une base (x, y) :

$$\mathbf{E}_0 = \begin{pmatrix} E_{0x} \exp(i\psi_x) \\ E_{0y} \exp(i\psi_y) \end{pmatrix}, \quad (2)$$

avec E_{0x} et E_{0y} réels. On rappelle le vecteur de Jones $\mathbf{u}$ représentant l'état de polarisation de la lumière :

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_{0x} \\ \mathcal{E}_{0y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{0x} \exp(i\psi_x) \\ E_{0y} \exp(i\psi_y) \end{pmatrix}, \quad (3)$$

qu'on peut normaliser si on le souhaite.

Partie I : Vecteurs et matrices de Jones

1. Quel est le vecteur de Jones unitaire représentant une polarisation linéaire tournée d'un angle α par rapport à x ?
 Quels sont les vecteurs de Jones unitaires représentant des polarisations circulaires droite et gauche ?
2. Quelle est la matrice de Jones pour un polariseur partiel dont l'axe passant (transmission 1) est aligné avec x et l'axe bloquant (transmission en intensité $\varepsilon \ll 1$) est aligné avec y ?
3. Quelle est la matrice de Jones pour une lame de phase de retard φ dont l'axe rapide est aligné avec x ?
4. Soit une lame demi-onde ($\varphi = \pi$) dont l'axe rapide est aligné avec x . On envoie sur cette lame, en incidence normale, une onde polarisée rectilignement dans une direction qui fait l'angle α avec l'axe x . Quelle est la polarisation de l'onde à la sortie de la lame ?
5. La même question pour une lame quart d'onde ($\varphi = \pi/2$) dont l'axe rapide est aligné avec x . Pour quelle(s) valeur(s) de α la polarisation à la sortie de la lame est-elle circulaire ?
6. Quelle est la matrice de Jones pour une lame de phase de retard φ dont l'axe rapide fait un angle θ avec x ?
7. Quelle est la matrice de Jones pour une lame quart d'onde ($\varphi = \pi/2$) tournée d'un angle θ par rapport à x ?
8. Quelle est la matrice de Jones pour une lame demi-onde ($\varphi = \pi$) tournée d'un angle θ par rapport à x ?
9. On place deux éléments de matrices de Jones $\mathbf{M}_1$ et $\mathbf{M}_2$ l'un derrière l'autre. Quelle matrice de Jones représente l'ensemble de ces éléments ?

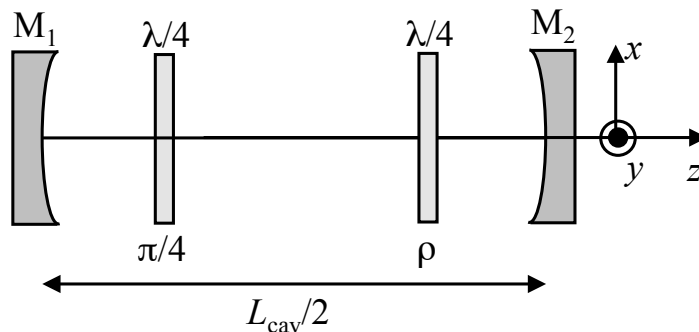


FIGURE 2 – Cavité à ondes hélicoïdales stationnaires.

Partie II : Cavité à ondes hélicoïdales (facultatif)

Considérons maintenant une cavité optique à deux miroirs (voir la figure 2) contenant deux lames quart d'onde tournées respectivement de $\pi/4$ et ρ par rapport x .

1. Calculer la matrice de Jones $\mathbf{M}$ pour un aller-retour dans cette cavité en partant de M_1 .
2. Quels sont les modes propres de polarisation de la cavité et leurs fréquences propres de résonance ?
3. Comment peut-on sélectionner un seul de ces modes ?
4. Quel est l'état de polarisation du mode x se propageant vers la droite entre les deux lames quart d'onde ?
5. Quel est l'état de polarisation du mode x se propageant vers la gauche entre les deux lames quart d'onde ? Garder les mêmes axes (x, y, z) .
6.   crire le champ électrique total entre les deux lames quart d'onde. De quel type d'onde s'agit-il ?
7. Comment le champ est-il polarisé entre la seconde lame quart d'onde et M_2 ?

TD8 - Biréfringences linéaires et circulaires

Exercice 1 - Diode optique

Une lame (voir la figure 1) à faces parallèles d'épaisseur d est taillée parallèlement à l'axe optique AO dans un matériau transparent anisotrope uniaxe, d'indices n_o et n_e . La lame est éclairée en incidence normale par une onde plane monochromatique de longueur d'onde dans le vide λ et polarisée rectilignement.

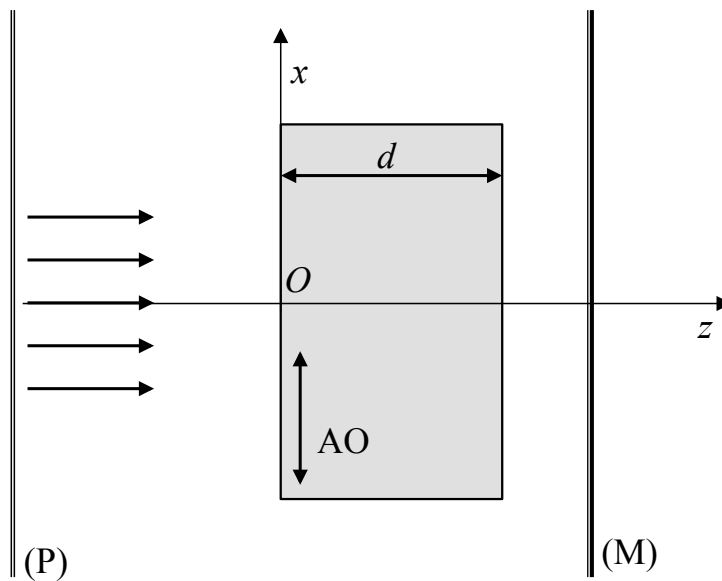


FIGURE 1 – Lame de calcite.

1. Quelles sont les directions des lignes neutres de la lame ? Calculer le déphasage introduit par la lame entre les deux composantes du champ électrique incident parallèles aux lignes neutres. Pour quelles valeurs de d la lame est-elle de type *quart d'onde* ?
On suppose dans la suite que la lame est quart d'onde.
2. Pour quelles valeurs de l'angle α que fait la polarisation du champ incident avec Ox la polarisation à la sortie de la lame est-elle circulaire ?
3. On réfléchit cette onde polarisée circulairement sur le miroir (M). Le sens de rotation du champ électrique autour de Oz change-t-il après la réflexion ? Si l'onde incidente sur (M) est circulaire droite, quelle est la polarisation de l'onde réfléchie ?
4. Quel est l'état de polarisation de la lumière après la seconde traversée de la lame ?
5. On suppose que la polarisation de l'onde incidente est créée par le polariseur (P) (voir la figure 1), l'onde réfléchie traverse-t-elle ce polariseur ?

Exercice 2 - Isolateur Faraday

Nous avons vu à l'exercice précédent qu'une lame quart d'onde pouvait servir à construire un isolateur optique. Mais cet isolateur en fonctionne que si la polarisation de la lumière n'est pas altérée par le composant qui la réfléchit. Nous allons dans cet exercice essayer de concevoir un isolateur optique basé sur une biréfringence circulaire et qui bloque la lumière quel que soit son état de polarisation.

1. Une cuve cylindrique de longueur D est remplie d'une solution de saccharose, dont le pouvoir rotatoire par unité de longueur est noté ρ . Une onde plane monochromatique traverse un polariseur rectiligne P avant de pénétrer dans la cuve. A la sortie de la cuve, un miroir plan, en incidence normale, renvoie la lumière vers la cuve. Exprimer l'angle α que fait la direction de la polarisation de l'onde sortant de la cuve par rapport à la direction de la polarisation incidente. L'onde renvoyée à travers la cuve traverse-t-elle le polariseur P ?
2. On remplace la solution de saccharose par un cristal de TGG (Terbium Gallium Garnet = grenat de terbium et gallium) de longueur $D = 4$ mm et de constante de Verdet $V = -1.075 \times 10^4 \text{ }^\circ \cdot \text{T}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$. On applique un champ magnétique statique intense B_0 orienté le long de la direction de propagation de la lumière. Calculer la valeur de B_0 pour que l'onde réfléchie soit arrêtée par le polariseur P .
3. On installe maintenant un deuxième polariseur P' après le cristal Faraday. B_0 est fixé à la valeur trouvée à la question précédente. Comment l'axe passant de P' doit-il être tourné par rapport à celui de P pour que le faisceau incident traverse P' sans pertes ? Qu'arrive-t-il à un faisceau qui arrive sur P' en sens inverse ?

Exercice 3 - Spectre cannelé

Une lame à face parallèle en quartz est taillée perpendiculairement à l'axe optique. Elle est placée entre deux polariseurs P_1 et P_2 et éclairée en incidence normale. L'axe passant de P_2 est tourné de $+45^\circ$ par rapport à celui de P_1 . La lumière utilisée a une longueur d'onde $\lambda_0 = 633$ nm, pour laquelle $n_D - n_G = 7.2 \times 10^{-5}$.

1. Le quartz considéré est-il lévogyre ou dextrogyre ? Calculer le pouvoir rotatoire par unité de longueur ρ .
2. Pour quelles épaisseurs de la lame de quartz la lumière est-elle transmise par le polariseur P_2 sans atténuation ? Donner la valeur numérique de la plus petite de ces épaisseurs e_0 .
3. On garde cette épaisseur e_0 . On éclaire le dispositif avec une longueur d'onde λ différente de λ_0 . On admet que ρ varie en fonction de la longueur d'onde selon la loi de Biot. Calculer l'intensité I émergeant du polariseur en fonction de λ et de l'intensité incidente I_0 .
4. On envoie maintenant de la lumière blanche. A quoi ressemble le spectre de la lumière transmise par P_2 . Quelles sont les longueurs d'onde des cannelures noires ? Quelle est la longueur d'onde de la cannelure noire la plus proche de λ_0 ?

Annexes

Devoir maison - Notation complexe & Transformée de Fourier

À rendre au TD2

Votre copie ne vous sera pas rendue. Si vous voulez garder une trace, scannez-la avant de la rendre à votre enseignant de TD

A. Notation complexe

Les grandeurs physiques (champ électromagnétique, potentiel, position et vitesse d'une particule, etc.) sont toutes décrites par des fonctions mathématiques à valeurs réelles. Lorsque celles-ci sont des fonctions oscillantes, il est toutefois pratique de travailler en représentation complexe, c'est à dire de considérer la fonction oscillante comme la partie réelle d'une fonction complexe. Soit $f(t)$ une fonction réelle qui oscille à la pulsation ω . Sa représentation complexe $\underline{f}(t)$ peut se définir de deux manières :

Définition 1 : $f(t) = \text{Re}[\underline{f}(t)]$, où $\underline{f}(t) = \underline{A} \exp[-i\omega t]$, avec $\underline{A} = A e^{i\phi}$ ($A \in \mathbb{R}$).

Définition 2 : $f(t) = \underline{f}(t) + \underline{f}^*(t) = \underline{A} \exp[-i\omega t] + \underline{A}^* \exp[i\omega t]$, avec $\underline{A} = A e^{i\phi}$.

(Note : $\underline{A}$ peut aussi être une fonction du temps qui varie sur une échelle de temps beaucoup plus longue que $2\pi/\omega$).

Une fois le choix d'une définition effectué, le calcul doit garder la même convention du début à la fin... !

1. Calcul de la valeur moyenne d'un produit

Soit $f(t)$ et $g(t)$ deux fonctions de représentations complexes $\underline{f}(t) = \underline{A} \exp[-i\omega t]$ et $\underline{g}(t) = \underline{B} \exp[-i\omega t]$ respectivement, avec $\underline{A} = |A| e^{i\phi_A}$ et $\underline{B} = |B| e^{i\phi_B}$. On définit la valeur moyenne du produit par :

$$\langle f(t)g(t) \rangle_T = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)g(t) dt, \quad (1)$$

où $T \gg 2\pi/\omega$. Calculer cette valeur moyenne en fonction de $\text{Re}[\underline{f}^* \underline{g}]$ pour les deux définitions possibles de la représentation complexe.

2. Dérivation des grandeurs complexes

Soit une fonction dont la représentation complexe est $\underline{f}(\mathbf{r}, t) = \underline{A} \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)]$, avec $\underline{A} = |A| e^{i\phi_A}$. Calculer $\partial f / \partial t$ et ∇f en utilisant les deux définitions possibles de f .

3. Grandeurs vectorielles

Soit $\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \mathcal{E} \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)]$ la représentation complexe d'un champ de vecteur $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, avec $\mathcal{E}$ un vecteur aux composantes a priori complexes. Le vecteur d'onde $\mathbf{k}$ a des composantes réelles. On définit de même un champ $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ de représentation complexe $\underline{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t) = \mathcal{B} \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)]$. On suppose les deux champs reliés par :

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (2)$$

Trouver la relation entre $\mathcal{E}$, $\mathcal{B}$ et $\mathbf{k}$ en utilisant les deux définitions de la représentation complexe. Même question pour la relation entre $\underline{\mathbf{E}}$, $\underline{\mathbf{B}}$ et $\mathbf{k}$, puis entre $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ et $\mathbf{k}$.

B. Transformée de Fourier

Dans ce cours, la transformée de Fourier temps-fréquence pour une fonction du temps f est définie par :

$$f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) e^{i\omega t}, \quad (3)$$

dont l'inverse est

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega f(\omega) e^{-i\omega t}. \quad (4)$$

On remarquera qu'on note f aussi bien la fonction que sa transformée de Fourier. Il convient donc de bien préciser les variables pour savoir de quoi on parle.

1. Dérivation

Quelle est la transformée de Fourier de $f'(t)$ et la transformée de Fourier inverse de $f'(\omega)$?

2. Symétrie

Si $f(t)$ est réelle que pouvez-vous dire de $f(\omega)$?

3. Homothétie

Quelle est la transformée de Fourier de $f(at)$ avec a réel ?

4. Translation

Quelle est la transformée de Fourier de $f(t + t_0)$? Et la transformée de Fourier inverse de $f(\omega + \omega_0)$?