

Contrôle continu 1 – algèbre linéaire

Exercice 1 (vrai/faux). Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses, en justifiant par un contre-exemple lorsque l'assertion est fausse, et en donnant une démonstration ou en citant convenablement le cours sinon. Soit E un espace vectoriel. Les familles considérées sont des familles de E .

1. *Toute famille contenant une famille libre est libre.* Non ; si e_1 est un vecteur non nul de E , alors la famille (e_1) est libre mais la famille $(e_1, 2e_1)$ n'est pas libre.
2. *Soit $k \leq n$ deux entiers et $(u_1, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs E telle que la famille restreinte aux k premiers termes est génératrice. Alors la famille $(u_1, \dots, u_n)$ est génératrice :* OUI, cf. cours.
3. *Toute famille libre contient une famille génératrice :* NON dans $\mathbb{R}^2$ la famille constituée du vecteur $e_1 = (1, 0)$ est libre mais n'engendre pas $\mathbb{R}^2$.
4. *Toute famille génératrice peut-être complétée en une base :* NON (par contre on peut en extraire une base) : dans $\mathbb{R}^2$ si on prend la famille $((1, 0); (0, 1); (1, 1))$ elle est génératrice mais on ne peut pas la compléter en une base car elle n'est pas libre.
5. *Soit F un sous-espace vectoriel de E . De toute base de E on peut extraire une base de F :* NON : par exemple si $E = \mathbb{R}^2$ et $F = \mathbb{R}(1, 1)$ et si on prend comme base de $\mathbb{R}^2$ la base canonique (e_1, e_2) alors ni e_1 ni e_2 ne sont dans F !
6. *Soit (u_1, u_2, u_3, u_4) une famille libre de E et $n = \dim(E)$. Alors n est supérieur ou égal à 4 :* OUI cf cours.
7. *Soit (u_1, u_2, u_3, u_4) une famille génératrice de E et $n = \dim(E)$. Alors n est supérieur ou égal à 4 :* NON par exemple dans $\mathbb{R}^2$ la dimension est 2 mais on peut prendre comme famille génératrice $u_1 = (1, 0)$, $u_2 = (0, 1)$, $u_3 = 2u_1$ et $u_4 = 2u_2$ (qui est génératrice car la sous-famille (u_1, u_2) l'est déjà).

Exercice 2. On considère les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ suivantes :

$$f_1 : x \mapsto 1, \quad f_2 : x \mapsto x, \quad f_3 : x \mapsto \sin(x).$$

1. *Montrer que la famille (f_1, f_2, f_3) est libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (on peut, par exemple, évaluer en des réels bien choisis, étudier le comportement en $+\infty$).* Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $af_1 + bf_2 + cf_3 = 0$. On a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $a + bx + c\sin(x) = 0$. En évaluant en $x = 0$ on obtient $a = 0$. Pour x non nul on a donc $b + c\frac{\sin(x)}{x} = 0$ donc en prenant la limite en $+\infty$ on obtient $b = 0$. Finalement, on a donc $c\sin(x) = 0$ et en évaluant en $x = \frac{\pi}{2}$ on en déduit que $c = 0$. Ainsi la famille est libre.
2. *Est-ce que la famille (f_1, f_3) engendre $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?* Non : par la question précédente la fonction f_2 n'est pas dans l'espace vectoriel engendré par (f_1, f_3) (sinon on aurait une relation de la forme $f_2 - af_1 - bf_3 = 0$ ce qui contredit la liberté de (f_1, f_2, f_3)).

3. Quelle est la dimension de l'espace vectoriel engendré par la famille (f_1, f_3) ? La famille (f_1, f_3) est libre comme sous-famille de la famille libre (f_1, f_2, f_3) et par ailleurs c'est par définition une famille génératrice du $\text{Vect}(f_1, f_3)$ donc c'est une base de cet espace vectoriel. En particulier il est de dimension 2.

Exercice 3. On considère dans $\mathbb{R}^3$ les deux ensembles suivants :

$$F := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0 \text{ et } 2x - y = 0\}, \text{ et } G := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x - y)^2 = 2x + y\}.$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. F est l'ensemble des solutions d'un système d'équations linéaires homogène, donc par le cours c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que le vecteur $u := (1, 2, 1)$ est dans F puis que $F = \text{Vect}(u)$. On vérifie que $1 - 2 + 1 = 0$ et que $2 \cdot 1 - 2 = 0$ donc u est dans F . En particulier on en déduit que $\text{Vect}(u) \subset F$. Réciproquement si $(x, y, z) \in F$ alors $y = 2x$ et $z = y - x = x$, donc $(x, y, z) = x(1, 2, 1)$ et ceci montre que (x, y, z) est dans $\text{Vect}(u)$.
3. Montrer que si $e_2 := (0, 1, 0)$ et $e_3 := (0, 0, 1)$ alors la famille (u, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$. Par cardinalité il suffit de vérifier que la famille est libre pour conclure. Soient donc $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $xu + ye_2 + ze_3 = 0$. Sur la première coordonnée on lit $x = 0$. On obtient donc que $ye_2 + ze_3 = 0$ or on sait que la famille (e_2, e_3) est libre (car c'est une sous-famille de la base canonique de $\mathbb{R}^3$), donc $y = z = 0$.
4. Montrer que G n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Le vecteur $u = (2, 0, 0)$ est dans G mais $2u = (4, 0, 0)$ et $(4 - 0)^2 = 16$ et $2 \cdot 4 + 0 = 8$ donc $2u$ n'est pas dans G .

Exercice 4. On pose dans $\mathbb{R}^2$: $u_1 = (1, 2)$, $u_2 = (-1, 1)$, $v_2 := (1, 3)$, $v_3 := (1, 0)$.

1. Montrer que la famille (u_1, u_2) engendre $\mathbb{R}^2$. Soit $a, b \in \mathbb{R}$, on veut montrer que le système $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = xu_1 + yu_2$ admet une solution en $x, y \in \mathbb{R}$. Il s'agit d'un système d'équations linéaires à deux inconnues et a deux équations. On l'échelonne et on voit qu'il y a bien une solution (unique d'ailleurs).
2. Cette famille est-elle une base de $\mathbb{R}^2$? C'est une famille génératrice de cardinal 2 dans $\mathbb{R}^2$ qui est de dimension 2. C'est donc une base (ce que nous disait aussi l'existence ET l'unicité du couple (x, y) solution de la question précédente).
3. Montrer que la famille (u_1, v_2, v_3) engendre $\mathbb{R}^2$. Comme précédemment on vérifie aisément que la famille (u_1, v_2) engendre $\mathbb{R}^2$, a fortiori il en est de même de la surfamille (u_1, v_2, v_3) .
4. Cette famille est-elle une base de $\mathbb{R}^2$? C'est une famille de cardinal 3 dans $\mathbb{R}^2$ qui est de dimension 2. Donc cela ne peut pas être une base.

Exercice 5. Dans l'espace des polynômes on considère l'ensemble suivant :

$$E := \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \text{il existe } \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ tels que } P = \mu X^2 + (2\lambda - 3\mu)X + \lambda\}.$$

1. *Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.* Le polynôme 0 est visiblement dans E (on prend $\lambda = \mu = 0$). Par ailleurs si $P, Q \in E$ et si $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, il existe $a, b \in \mathbb{R}$ et il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $P = aX^2 + (2b - 3a)X + b$ et $Q = \alpha X^2 + (2\beta - 3\alpha)X + \beta$. On a donc

$$\lambda P + \mu Q = \lambda (aX^2 + (2b - 3a)X + b) + \mu (\alpha X^2 + (2\beta - 3\alpha)X + \beta)$$

ce qui donne

$$\lambda P + \mu Q = (\lambda a + \mu \alpha)X^2 + (2(\lambda b + \mu \beta) - 3(\lambda a + \mu \alpha))X + (\lambda b + \mu \beta).$$

en posant $A = \lambda a + \mu \alpha$ et $B = \lambda b + \mu \beta$ on voit que P a bien la forme d'un élément de E , avec $P = AX^2 + (2B - 3A)X + B$. Donc E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

2. *Montrer (sans calcul) que la dimension de E est inférieure ou égale à 3.* On voit que E est en fait inclus dans $\mathbb{R}_2[X]$ qui est un espace vectoriel de dimension 3 (de base $(1, X, X^2)$) donc E est par le cours de dimension inférieure ou égale à 3.
3. *Montrer que les vecteurs $P_1 := X^2 - 3X$ et $P_2 := 2X + 1$ sont dans E et que la famille $\mathcal{B} := (P_1, P_2)$ est une base de E .* On voit (avec $\lambda = 1$ et $\mu = 0$) que $X^2 - 3X$ est dans E . De même on voit (avec $\lambda = 0$ et $\mu = 1$) que $2X + 1$ est dans E . Soit P dans E . Il existe donc $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $P = \mu X^2 + (2\lambda - 3\mu)X + \lambda$. On a donc

$$P = \mu(X^2 - 3X) + \lambda(2X + 1) = \mu P_1 + \lambda P_2.$$

Ceci nous assure que la famille est génératrice. Par ailleurs si $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ sont tels que $\mu(X^2 - 3X) + \lambda(2X + 1) = 0$, alors on a $\mu X^2 + (2\lambda - 3\mu)X + \lambda = 0$. En identifiant dans la famille libre $(1, X, X^2)$ on en déduit que $\mu = \lambda = 0$. Ainsi $\mathcal{B}$ est une base de E .

4. *Vérifier que $P := X^2 - X + 1$ est dans E et écrire ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$.* On prend $\mu = \lambda = 1$ pour vérifier que $P = X^2 - X + 1 = \mu X^2 + (2\lambda - 3\mu)X + \lambda$ est dans E . On cherche $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $P = a(X^2 - 3X) + b(2X + 1)$. Le couple (a, b) sera les coordonnées de P dans la base $\mathcal{B}$. Soit donc $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$P = aP_1 + bP_2 = a(X^2 - 3X) + b(2X + 1).$$

(Un tel couple existe car on décompose P dans la base $\mathcal{B}$ qui est donc en particulier une famille génératrice). On a donc $X^2 - X + 1 = aX^2 + (2b - 3a)X + b$. Par identification (possible car la famille $(1, X, X^2)$ est libre) on en déduit que

$$a = b = 1.$$

Ce sont les coordonnées recherchées.