Évaluation Mercredi 14 février

Documents interdits, calculatrices interdites.
Toutes les réponses doivent être justifiées
Durée : 1h30
Durée tiers-temps : 2h

Exercice 1 ().

Partie I

1. Montrer qu'il existe une unique solution $a, b, c \in \mathbb{R}$ telle que :
$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$
2. Montrer qu'il existe une unique solution $a', b', c' \in \mathbb{R}$ telle que :
$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = a'\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + b'\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} + c'\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$
3. Calculer l'inverse de la matrice suivante :
$$M = \begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\0 & 1 & 0\\-1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$
4. Démontrer que
$$M\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}$$
5. Démontrer qu'il n'y a qu'une solution pour écrire le vecteur $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$
6. Démontrer que le vecteur $\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$ n'appartient pas à Vect $\left(\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$

Partie II

Définition 1: Base de $\mathbb{R}^3$ et coordonnées d'un vecteur

Lorsque v_1, v_2 et v_3 sont trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$, on dit qu'ils forment une *base* $\mathcal{B}$ si la seule solution à l'équation

$$av_1 + bv_2 + cv_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

est $a = 0, b = 0, c = 0$.
Dans ce cas, tout vecteur v de $\mathbb{R}^3$ peut se décomposer d'une manière suivante :

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$$

et $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sont appelées *coordonnées de* v dans la base $\mathcal{B}$.

1. Sans aucun calcul, expliquer en quoi les questions de la Partie I permettent de trouver un exemple de base $\mathcal{B}$ et de coordonnées d'un vecteur dans cette base.

   Pour les questions suivantes, on considère une base $\mathcal{B}$ formée de vecteurs v_1, v_2, v_3 et une base $\mathcal{B}'$ formée de vecteurs v'_1, v'_2, v'_3.
   On définit alors la matrice $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que :
   - La première colonne de P est formée par les trois coordonnées de v_1 dans la base $\mathcal{B}'$.
   - La deuxième colonne de P est formée par les trois coordonnées de v_2 dans la base $\mathcal{B}'$.
   - La troisième colonne de P est formée par les trois coordonnées de v_3 dans la base $\mathcal{B}'$.
2. Démontrer que si v est un vecteur ayant pour coordonnée x, y, z dans la base $\mathcal{B}$ et x', y', z' dans la base $\mathcal{B}'$, alors :
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$
3. On définit également la matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que :
   - La première colonne de M est formée par les trois coordonnées de v'_1 dans la base $\mathcal{B}$.
   - La deuxième colonne de M est formée par les trois coordonnées de v'_2 dans la base $\mathcal{B}$.
   - La troisième colonne de M est formée par les trois coordonnées de v'_3 dans la base $\mathcal{B}$.

   Démontrer que
$$P^{-1} = M$$