Évaluation du Mardi 12 Mars

Documents interdits, calculatrices interdites.
Toutes les réponses doivent être justifiées
Durée : 1h30
Durée tiers-temps : 2h

Exercice 1 ().

Partie I

Dans toute cette partie, on considère la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Dans l'ordre que vous voulez, répondre aux trois questions suivantes :
   (a) Calculer $\ker(A)$.
   (b) Calculer $\mathrm{rang}(A)$.
   (c) Déterminer si A est inversible ou non.
2. Démontrer que
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}(A)$$
3. Calculer A^2.
4. Déterminer une famille génératrice minimale de $\mathrm{Im}(A^2)$.
5. On pose $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Calculer Av et A^2v
   (b) Démontrer qu'il n'y a qu'une seule solution pour écrire le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Partie II

Dans cette partie, on admet le résultat suivant :

Proposition 1:

Si E_1 et E_2 sont deux espaces engendrés tels que $E_1 \subset E_2$, alors

$$\dim(E_1) \leq \dim(E_2)$$

De plus, si $E_1 \subset E_2$ et si $\dim(E_1) = \dim(E_2)$, alors $E_1 = E_2$.

Pour toute la suite, on pose une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que M^3 est la matrice nulle ($M^3 = 0$) et telle que M^2 ne l'est pas ($M^2 \neq 0$).

1. En raisonnant par l'absurde, démontrer que M n'est pas inversible.
2. Soit $v \in \mathbb{R}^3$ (ou $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$) un vecteur tel que $M^2 v \neq 0$. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$.
   Démontrer que si $\lambda_1 v + \lambda_2 M v + \lambda_3 M^2 v = 0$, alors
   $$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$
3. Démontrer que
   $$\mathrm{Im}(M^2) \subset \ker(M)$$
4. Démontrer que
   $$\mathrm{Im}(M^2) \subset \mathrm{Im}(M)$$
5. Démontrer que si $\mathrm{Im}(M^2) = \mathrm{Im}(M)$, alors $\mathrm{Im}(M^3) = \mathrm{Im}(M^2)$.
6. Démontrer que
   $$\mathrm{Im}(M^2) = \ker(M)$$