
Examen d'Optique

Durée de l'épreuve : 3 heures

Le sujet comporte 5 pages. Aucun document n'est autorisé. Les téléphones portables doivent être éteints et rangés. Les trois problèmes sont indépendants.

Formulaire

- Expression des transformées de Fourier temps/fréquence pour une fonction $f(t)$:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \tilde{f}(\omega) e^{-i\omega t}$$
$$\tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) e^{i\omega t}$$

- Expression de l'amplitude complexe d'un champ scalaire diffracté en z en fonction du champ en $z = 0$ à l'approximation de Fraunhofer, pour un faisceau se propageant dans la direction z :

$$E(x, y, z, \omega) = -\frac{ik}{2\pi} E \left(k_x = \frac{kx}{z}, k_y = \frac{ky}{z}, z = 0, \omega \right) \frac{e^{ikr}}{r} .$$

Exercice I/ : Cavité Fabry-Perot dans le domaine temporel

On considère une cavité Fabry-Perot (Figure 1) constituée de deux miroirs M_1 et M_2 , identiques, de coefficients de réflexion et de transmission en amplitude *internes*   la cavité, r et t , supposés réels. (Les coefficients correspondant aux faces *externes* de la cavité sont notés r' et t'). Le milieu à l'intérieur de la cavité a l'indice optique n . La longueur de la cavité est d . On suppose également, pour simplifier, que l'indice optique n et les coefficients de réflexion et transmission sont indépendants de la fréquence. On rappelle que $tt' = T$ et $rr' = R$, où R (T) est le coefficient de réflexion (transmission) en intensité de chacun des miroirs de la cavité.

Une impulsion lumineuse ultra-courte est incidente, en incidence normale, sur le miroir M_1 situé en $z = 0$. Le champ de l'impulsion, en notation complexe, juste avant le miroir M_1 est sous la forme :

$$E_i(z = 0^-, t) = \mathcal{E}_0 \delta(t)$$

où $\mathcal{E}_0$ est une amplitude complexe, et $\delta(t)$ correspond à la fonction delta de Dirac.

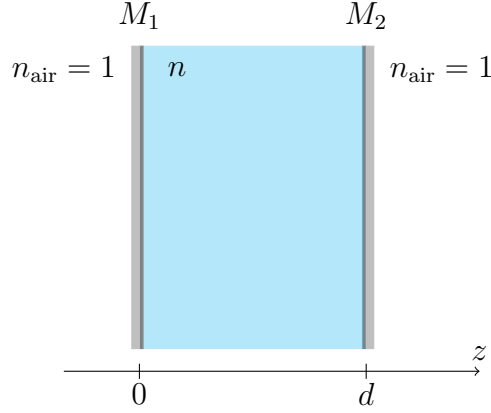


Figure 1: Cavité Fabry-Perot

1. Exprimer le spectre de l'impulsion, $\tilde{E}_i(z = 0^-, \omega)$.
2. Exprimer le champ $\tilde{E}_{\text{out}}(z = d^+, \omega)$ à la sortie de la cavité (juste après M_2) comme une superposition (somme) d'ondes transmises ayant subi $0, 2, 4 \dots$ réflexions sur les faces internes de la cavité.
3. On introduit le coefficient $\mathcal{T}$ de transmission en intensité de la cavité par $\mathcal{T}(\omega) = \left| \frac{\tilde{E}_{\text{out}}(z=d^+, \omega)}{\tilde{E}_i(z=0^-, \omega)} \right|^2$ et on note $\tau = \frac{2nd}{c}$. Montrer que :

$$\mathcal{T}(\omega) = \frac{A}{1 + (4\mathcal{F}^2/\pi^2) \sin^2(\frac{\omega\tau}{2})}$$

où A et $\mathcal{F}$ sont des constantes que vous exprimerez en fonction de R et T . Que vaut A si les miroirs ne présentent pas de pertes par absorption ou diffusion ?

4. Pour quelles fréquences ν_p la transmission de la cavité présente-t-elle des résonances? Exprimer l'intervalle spectral libre de la cavité (séparation en fréquence entre deux résonances successives) en fonction de n , d et c . En supposant les miroirs de haute qualité (R proche de 1), exprimer la largeur $\delta\nu$ à mi-hauteur des pics de transmission du Fabry-Perot.
5. En utilisant l'expression de $\tilde{E}_{\text{out}}(z = d^+, \omega)$ sous forme de somme trouvée à la question 2, montrer que le champ en sortie de la cavité $E_{\text{out}}(z = d^+, t)$ est constitué d'une superposition d'impulsion ultra-courtes séparées temporellement de τ et que chaque aller-retour dans la cavité entraîne une diminution de l'amplitude des impulsions par un facteur dont on donnera l'expression.
6. Montrer que le champ transmis à la sortie de la cavité s'écrit comme :

$$E_{\text{out}}(z = d^+, t) = \mathcal{E}_0 T \sum_{p=0}^{\infty} \delta(t - \tau/2 - p\tau) e^{-\gamma(t-\tau/2)}, \quad \text{si } t > 0$$

où on exprimera γ en fonction de R et τ .

7. Soit N le nombre d'allers-retours dans la cavité après lequel l'amplitude de l'impulsion est divisée par un facteur e (nombre d'Euler, $e \approx 2.7$). Exprimer N en fonction de R . Montrer que pour $R \approx 1$, $N \approx \frac{1}{1-R} \approx \frac{\mathcal{F}}{\pi}$. Quelle est la durée du train d'impulsions sorti de la cavité, mesurée entre le début (sortie de la première impulsion) et le moment où sort de la cavité l'impulsion ayant une amplitude qui vaut $1/e$ de l'amplitude de la première impulsion sortie ? (On rappelle que $\ln(1+x) \approx x$ pour $|x| \ll 1$).

Exercice II/: Optique anisotrope

1. Donner, dans un milieu anisotrope, la relation entre le vecteur déplacement $\vec{D}$ et le champ électrique $\vec{E}$. Qu'appelle-t-on axes principaux du milieu ?
2. À l'aide de l'équation de Maxwell-Ampère, expliquez pourquoi dans un tel milieu les directions du vecteur d'onde $\vec{k}$ et du vecteur de Poynting $\vec{S}$ ne sont-elles (*a priori*) pas parallèles. A quelle condition ces directions sont-elle parallèles ?
3. Qu'appelle-t-on un milieu uniaxe ? Donner des exemples de milieux uniaxes. Dans tout ce qui suit, on ne considère que des milieux uniaxes et on prendra pour les figures $n_o < n_e$.

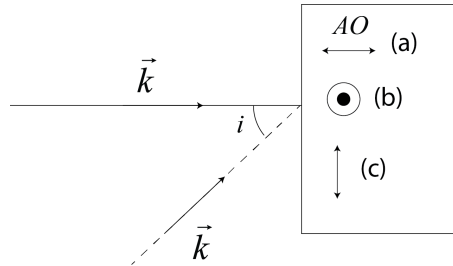


Figure 2: Onde monochromatique incidente sur un crystal uniaxe, selon trois orientations (a), (b) et (c) différentes.

4. Faire trois figures **claires** représentant l'évolution d'une onde plane monochromatique (c'est-à-dire, donner les directions de $\vec{D}$, $\vec{E}$, $\vec{k}$ et $\vec{S}$ pour le rayon "extraordinaire" et le rayon "ordinaire") quand l'onde plane est en incidence normale sur la face d'entrée d'un milieu uniaxe, lorsque l'axe optique (AO) est
 - (a) perpendiculaire à la face d'entrée et parallèle au plan d'incidence (voir figure 2 avec l'axe optique (a)),
 - (b) parallèle à la face d'entrée et perpendiculaire au plan d'incidence (voir figure 2 avec l'axe optique (b)),
 - (c) parallèle à la face d'entrée et parallèle au plan d'incidence (voir figure 2 avec l'axe optique (c)).

- Reprendre les trois différentes orientations de l'axe optique précédentes et pour chacune d'entre elles représenter l'évolution d'une onde plane monochromatique (donner les directions de $\vec{D}$, $\vec{E}$, $\vec{k}$ et $\vec{S}$ pour le rayon "extraordinaire" et le rayon "ordinaire") en incidence quelconque sur la face d'entrée.
- Qu'appelle-t-on lignes neutres ? axe lent et axe rapide ?
- On note i l'angle d'incidence. Quelle est l'indice n'' "vu" par le rayon "extraordinaire" dans le cas (c).
- Donner des exemples de biréfringence induite.

Exercice III/: Diffraction par un ressort

Diffraction optique

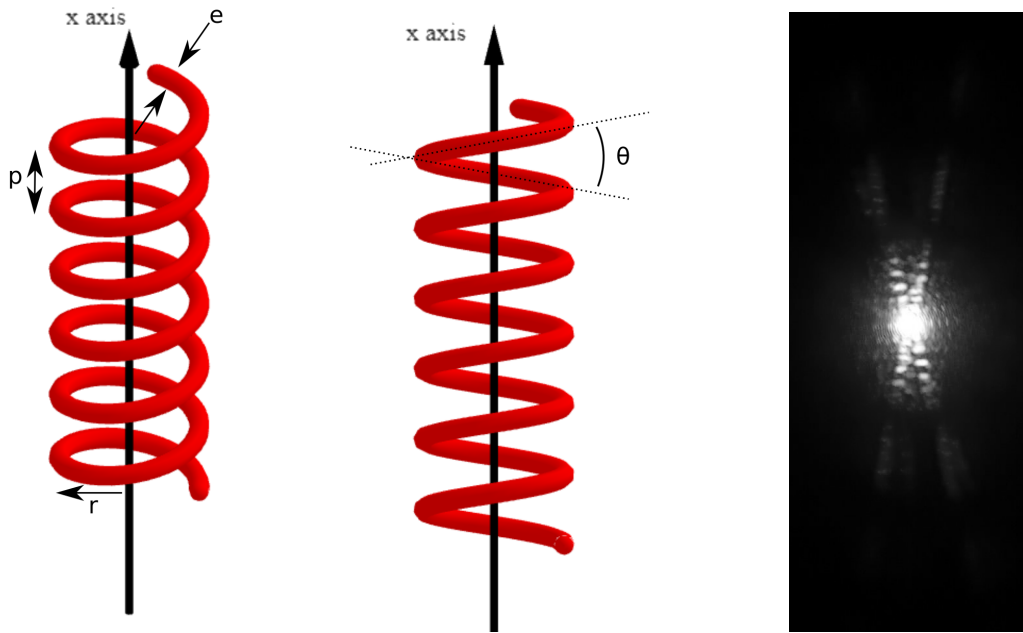


Figure 3: Vue du ressort d'axe x en perspective (gauche) et dans la direction z perpendiculaire à x (centre). Droite : figure de la diffraction par ce ressort. La figure est à l'échelle.

La diffraction d'un petit ressort est étudiée avec un laser Hélium-Néon ($\lambda = 633 \text{ nm}$). Le diamètre du fil est noté e , le rayon du ressort est noté r et le pas du ressort est noté p .

- Proposez un montage optique pour voir la diffraction dans les conditions de Fraunhofer. Faire un schéma.
- On s'intéresse dans un premier temps à un réseau simple composé d'une série de fentes identiques de largeur e et de pas p . Quelle est la figure de diffraction attendue dans le régime de Fraunhofer pour ce réseau?

3. Comment cette figure de diffraction est-elle impactée par les paramètres p et e ?
4. En particulier, justifier que cette figure de diffraction possède des maxima à des positions angulaires proportionnelles à $\alpha = \lambda/p$. Comment s'appellent ces maxima?
5. Justifier que si l'on penche le réseau d'un angle θ la figure de diffraction sera aussi penchée d'un angle θ .
6. On revient maintenant au cas de la diffraction par un ressort. On note que sur la vue de la figure 3-centre, les anneaux forment un angle θ entre l'avant et l'arrière du ressort. Exprimer θ en fonction de r et p .
7. La figure 3-droite est une photo de la diffraction obtenue, à une distance $d = 2$ m du ressort. On remarque un X dont chacune des branches forme une figure de diffraction contenant à la fois des petites franges d'interférences à l'intérieur d'une figure d'interférence contenant un interfrange plus grand. À l'aide des questions précédentes, justifier cette figure de diffraction.
8. À partir de cette figure, remonter aux paramètres e , r et p du ressort utilisé dans cette expérience. Faire les applications numériques.

Diffraction des rayons X

La figure 4 reproduit le cliché de la figure de diffraction de rayons X par la molécule d'ADN prise par le laboratoire de Rosalind Franklin, bien connue sous le nom de "Photo 51", qui est devenue la base de la découverte de la structure hélicoïdale de l'ADN par Watson et Crick en 1952. La longueur d'onde des rayons X sera prise égale à 1,5 angström, soit 0,15 nm. La distance entre le film et le specimen est de 5,5 mm. La photo est à l'échelle.

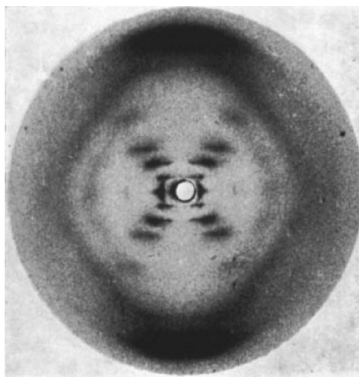


Figure 4: cliché 51.

9. Retrouver le pas et le rayon de la molécule d'ADN.
10. On remarque que l'ordre 4 est manquant. De quoi ceci est-il le signe ?