Examen d'optique
6 mai 2024

Durée: 3 heures

Année 2023-2024

Les documents de cours et TD sont autorisés.
Une écriture lisible et une présentation soignée ont un effet positif sur l'humeur de la correctrice ou du correcteur.
On attachera un soin particulier aux applications numériques et aux tracés de courbes.
Les trois problèmes sont indépendants.

1 Imagerie de contraste de phase

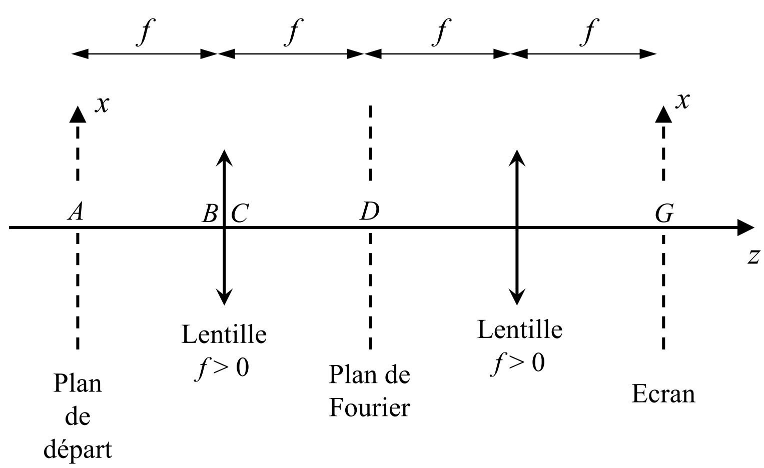

FIGURE 1 – Système de filtrage spatial $4f$.

On considère le système optique représenté sur la figure 1. Il s'agit d'un système de filtrage spatial $4f$ comme nous avons vu en cours. La lumière, monochromatique de fréquence ω, arrive de la gauche et se propage le long de l'axe z. Elle part du plan de départ A, passe la première lentille mince de focale $f > 0$, arrive dans le plan de Fourier D, puis traverse la seconde lentille identique à la première avant d'arriver sur l'écran d'observation. On néglige dans tout le problème la dimension transverse y.

Les distances entre les différents plans et les lentilles sont toutes égales à f, comme indiqué dans le haut de la figure.

On représente les champs, supposés scalaires, en notation complexe. Par exemple, le champ incident dans le plan de départ s'écrit

$$E_A(x,t) = \mathcal{E}_A(x)e^{-i\omega t} + c.c. \ , \tag{1}$$

où $\mathcal{E}_A(x)$ est l'amplitude complexe du champ dans le plan A.

On donne la transmission d'une lentille mince de focale f pour l'amplitude complexe du champ :

$$t_f(x) = \exp\left(-i\frac{kx^2}{2f}\right) \ , \tag{2}$$

où $k = \omega/c$.

1.1 En présence d'une seule dimension transverse x, le propagateur pour une distance z pour la diffraction à l'approximation de Fresnel est donné dans l'espace réciproque (l'espace des k_x) par (voir le cours numéro 5) :

$$h_{Fresnel}(k_x, z) = e^{ikz}\exp\left(-i\frac{z}{2k}k_x^2\right) \ . \tag{3}$$

Montrer, en utilisant la transformée de Fourier d'une gaussienne, que sa transformée de Fourier s'écrit

$$h_{Fresnel}(x, z) = He^{ikz}\exp\left(i\frac{k}{2z}x^2\right) \ , \tag{4}$$

où on exprimera H en fonction de la longueur d'onde λ et de z.
Si vous ne trouvez pas l'expression de H, vous pouvez continuer quand même en gardant H dans les équations....

1.2 On note B le plan situé juste avant la première lentille. Exprimer la transformée de Fourier $\mathcal{E}_B(k_x)$ de l'amplitude complexe du champ en B en fonction de celle $\mathcal{E}_A(k_x)$ du champ de départ.

1.3 Exprimer Exprimer l'amplitude complexe $\mathcal{E}_C(x)$ du champ juste après la lentille en fonction de $\mathcal{E}_B(x)$.

1.4 En déduire l'expression de l'amplitude complexe $\mathcal{E}_D(x)$ du champ dans le plan de Fourier en fonction de la transformée de Fourier $\mathcal{E}_B(k_x)$ de l'amplitude du champ juste avant la lentille.

1.5 En utilisant le résultat de la question 1.2, trouver l'expression de l'amplitude complexe $\mathcal{E}_D(x)$ du champ dans le plan de Fourier en fonction de la transformée de Fourier $\mathcal{E}_A(k_x)$ de l'amplitude du champ de départ.

1.6 On suppose que l'amplitude complexe du champ de départ s'écrit

$$\mathcal{E}_A(x) = \mathcal{E}_0 e^{i\phi(x)} \ , \tag{5}$$

où le front d'onde est modulé sinusoïdalement avec une période p :

$$\phi(x) = \phi_0 \cos\frac{2\pi x}{p} \ . \tag{6}$$

Dans la suite on prend $p = 5\,\mu\text{m}$, $\lambda = 0.5\,\mu\text{m}$, $f = 0.1\,\text{m}$ et $\phi_0 = 10^{-2}\,\text{rad} \ll 1\,\text{rad}$.
Faire un développement limité du front d'onde au deuxième ordre en ϕ_0 sous la forme :

$$e^{i\phi(x)} \simeq K + L\cos\frac{2\pi x}{p} + M\cos\frac{4\pi x}{p}\ . \tag{7}$$

On donnera les expressions de K, L et M en fonction de ϕ_0 et ϕ_0^2.

1.7 En déduire $\mathcal{E}_A(k_x)$. On rappelle que $\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ik_x x} = 2\pi\delta(k_x)$.

1.8 On met un écran dans le plan de Fourier D. Faites un dessin de ce qu'on observe sur cet écran ? Combien de taches ? Avec quelles amplitudes ? Donner les expressions et les valeurs numériques des positions des taches que vous prédisez.

1.9 On enlève l'écran du plan de Fourier et on laisse la lumière se propager à travers la seconde lentille jusqu'à l'écran G qui est tout à droite de la figure 1. Quelle distribution d'intensité observe-t-on sur cet écran ?

1.10 On place maitenant dans le plan de Fourier D une fente de $3\,\text{cm}$ de largeur centrée sur l'axe. Quelle est l'expression de l'amplitude $\mathcal{E}_G(x)$ du champ sur l'écran G ?

1.11 On note I_0 l'intensité de l'onde incidente dans le plan A. Calculer la distribution d'intensité $I_G(x)$ sur l'écran G et en déduire la période des franges d'interférence observées sur cet écran. Quel est leur contraste $\mathcal{C}$ défini par :

$$\mathcal{C} = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}\ . \tag{8}$$

Donner la valeur numérique du contraste.

1.12 On rajoute dans le plan de Fourier, en plus de la fente, une lame déphasante de $1\,\text{mm}$ de largeur (déphasage de $\pi/2$) de transmission $t = 0,1$ en amplitude. Que deviennent les réponses à la question précédente ?

1.13 En quelques lignes, à quoi pensez-vous qu'un tel système puisse servir ?