Modélisation de la dynamique de population des levures

La levure *Sacharomyces cerevisae* colonise des milieux très différents dont la richesse en ressource est variable (voir Figure 1) : la forêt, les fruits, les produits alimentaires fermentés (bière, vin, levain, saucisson,...). Il existe une diversité génotypique et phénotypique à l'intérieur de cette espèce. Selon les souches, le taux de croissance, la vitesse à laquelle elles consomment les ressources, la capacité à utiliser les ressources du milieu pour produire des descendants peut varier. Ces variations peuvent notamment être dues à l'adaptation des souches à l'environnement dans lequel elles se trouvent. Si une stratégie (combinaison de la valeur des traits) permet de mieux survivre et se reproduire dans un environnement donné, on va la retrouver souvent dans cet environnement. On parle donc de trait adaptatif, ou trait d'histoire de vie, si la capacité à survivre et se reproduire dans un milieu dépend de ce trait.
Pour étudier ces traits au laboratoire, on peut faire des cultures de souches échantillonnées dans différents environnements. Des étudiants de LDD1 M, SV ont effectué ces expériences sur trois souches de levure échantillonnées dans trois environnements différents : la souche 104 a été échantillonnée sur chêne, la 270 sur fruit et la 304 provient d'un isolat clinique.
Vous allez explorer ces données ainsi qu'un modèle mathématique pour comprendre les traits d'histoire de vie et leur évolution.

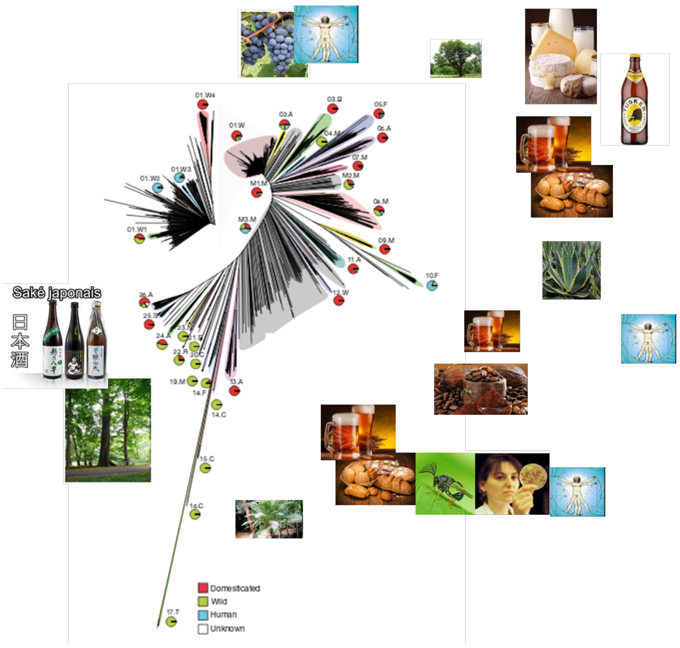

Figure 1: Diversité de la levure *Sacharomyces cerevisae* adapté de *Peter et al, 2018.* Diversité génétique et diversité des niches écologiques.

Exercice 1 : Découverte des données expérimentales
Dans certaines conditions, la levure *Sacharomyces cerevisae*, un eucaryote uni-cellulaire, se reproduit par bourgeonnement en utilisant la fermentation du glucose pour produire de l'énergie. Chaque cellule-mère produit un bourgeon, qui devient une cellule-fille, qui va se diviser à son tour. La cellule-mère continuera elle aussi à bourgeonner et se diviser.
Chaque souche a été cultivée dans le même environnement et la densité des cellules à a été estimée à différents temps en utilisant la densité optique. Vous ferez l'hypothèse que la DO est proportionnelle à la concentration de cellule. Pour mettre en place l'expérience, une pré-culture est effectuée à partir d'une colonie. A partir de cette pré-culture, deux cultures sont initiées. Pour chaque souche, trois pré-cultures indépendantes ont été effectuées. Ainsi, pour chaque souche, six dynamiques ont été observées. Dans cet exercice, les pré-cultures sont appelées réplicats biologiques, les deux cultures initiées à partir de la même pré-culture sont appelés réplicats techniques (voir figure 2). Les résultats obtenus sont représentés sur la figure 3. Commentez brièvement la figure 3. Pour cela, vous décrirez notamment 4 sources de variations de la DO visibles sur la figure (max 5 lignes).

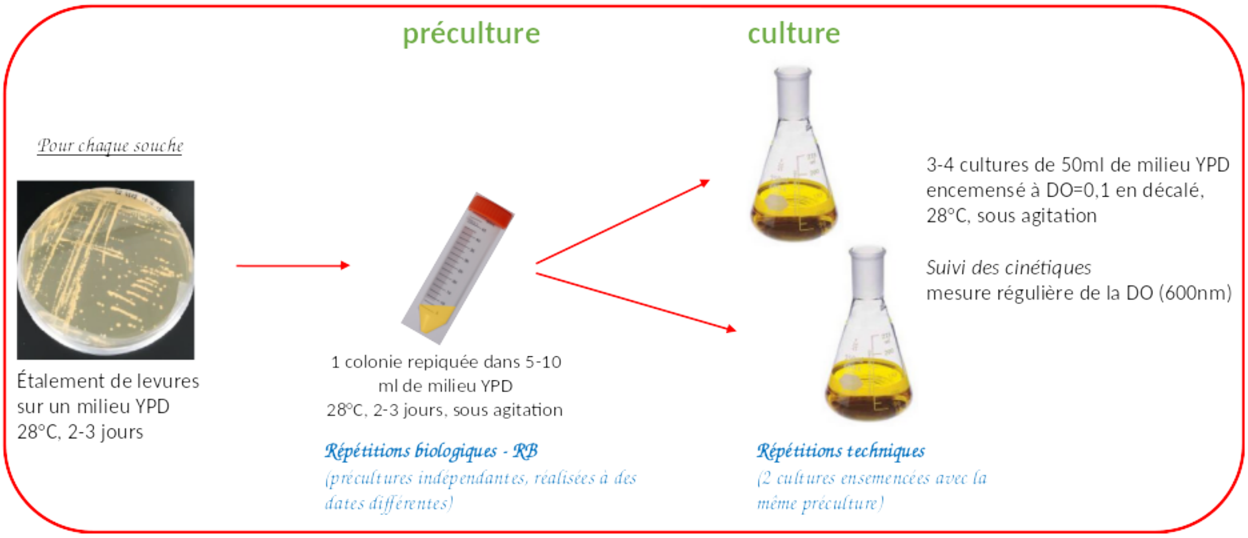

Figure 2: Mise en place de l'expérience pour une souche. Description fournie par N. Conde e Silva.

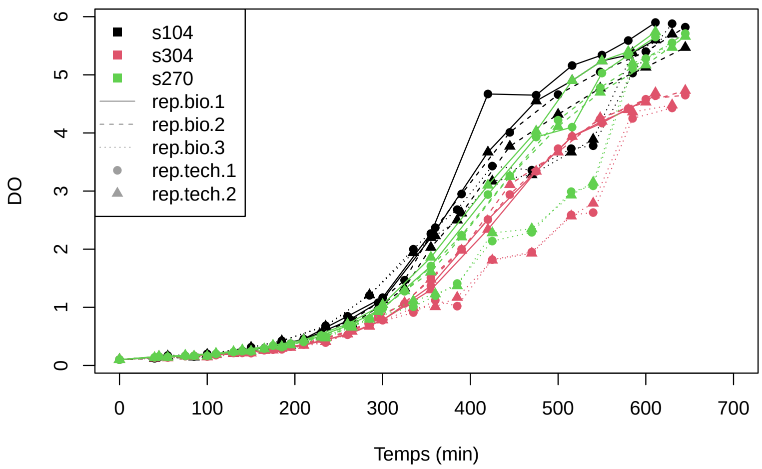

Figure 3: Variation de la densité optique de culture de levure au cours du temps pour trois souches différentes.

Exercice 2 : modélisation de la dynamique d'une population par un modèle exponentiel

Vous avez vu comment modéliser la croissance d'une population se reproduisant de façon asynchrone. Dans cette séance, on notera $x(t)$ la taille de la population de levure au temps t.

1. Ecrire l'équation différentielle pour $x'(t)$.
2. Quelle est la solution générale de l'équation différentielle?
3. A votre avis, ce modèle permet-il de modéliser toute la dynamique observée ou seulement une partie de la dynamique?
4. A partir des données observées entre $t = 0$ et $t = 300$ min, on peut estimer le taux du croissance du modèle exponentiel r pour chaque souche. Les estimations sont données dans le tableau ci-dessous. Estimer le temps de génération de chaque souche à partir de données présentées dans le tableau. Vous expliquerez votre démarche.

souche	r
104	0.008
270	0.007
304	0.006

5. *Bonus :* d'après vous, à partir des données observées pour $t < 300$ min, comment estimer le taux de croissance r du modèle exponentiel?

Exercice 3 : modélisation de la dynamique d'une population par un modèle logistique

Dans l'exercice précédent, vous avez décrit le modèle exponentiel. On peut modifier le modèle précédent en considérant que le taux de croissance varie en fonction du temps ou de la taille de la population. On peut par exemple utiliser un modèle de croissance logistique :

$$x' = rx(1 - \frac{x}{K})$$

Par rapport au modèle exponentiel, on voit que le terme $(1 - \frac{x}{K})$ va faire diminuer le taux de croissance si x est proche de K. Cela permet de modéliser la compétition.

1. Selon vous, quand faut-il mieux utiliser ce second modèle?
2. Un **point d'équilibre** est une solution constante de l'équation différentielle pour laquelle la dérivée par rapport au temps est nulle. Quels sont les deux points d'équilibre x_1 et x_2 de l'équation différentielle $x(t)' = rx(t)(1 - \frac{x(t)}{K})$. On prendra $(x_1 < x_2)$.
3. Donner l'interprétation biologique de x_1 et x_2.
4. Soit la fonction $f()$ définie par $f(z) = rz(1 - \frac{z}{K})$. Etudier le signe de $f(z)$ selon la valeur de z. Présentez les résultats dans un tableau de signe.
5. Déduire du tableau de signe, le signe de $x'(t)$ selon les valeurs de $x(t)$.
6. D'après vos réponses à la question précédente, comment va évoluer la population si :
   - $x(0) = 0$
   - $x(0) = K$
   - $x(0) = x_0$ avec $x_0 \in]0; K[$
   - $x(0) = x_0$ avec $x_0 > K$
7. Soit $y(t) = \frac{1}{x(t)}$. A partir de l'équation différentielle pour $x(t)$, trouvez l'équation différentielle pour y'. Nous verrons comment résoudre cette équation à la prochaine séance.