Manipuler les matrices en tant que transformation du plan ou de l'espace

1.1 Savoir-faire calculatoires

Exercice 1 ().

Savoir-Faire

- Effectuer une combinaison linéaire de matrices

Dans chacun des cas suivants, justifier si les combinaisons linéaires $A+2B$ et $2A-3B$ sont possibles et les effectuer le cas échéant :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

3. $A = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

4. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

5. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

6. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & -3 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice 2 ().

Savoir-Faire

- Effectuer un produit matriciel

Calculer les produits suivants :

1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$$

2

2.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

3.

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

4.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

5.

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 3 ().

Savoir-Faire

- Effectuer un produit matriciel

On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Quelles sont les produits de deux matrices parmi

A, B, C, D, E et F qu'il est possible de faire ? (justifier)

2. Calculer les produits suivants :

- AB
- EF
- DC
- CD
- BA
- FE

Exercice 4 ().

Savoir-Faire

- Utiliser la définition de l'inverse d'une matrice

À l'aide de la définition de la matrice inverse, déterminer l'inverse d'une matrice $A \in M_3(\mathbb{R})$ vérifiant $A^2 = I_3$?

Exercice 5 ().

Savoir-Faire

- Utiliser la définition de l'inverse d'une matrice

On considère les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer AB

2. Peut-on dire que A est l'inverse de B ? (expliquer)

Exercice 6 ().

Savoir-Faire

- Utiliser la définition de l'inverse d'une matrice

Parmi les matrices suivantes, laquelle est l'inverse de $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$?

1. $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

2. $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

3. $M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 7 ().

Savoir-Faire

- Inverser une matrice

Inverser les matrices suivantes :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Exercice 8 ().

Savoir-Faire

- Effectuer un produit matriciel
- Effectuer une combinaison linéaire de matrices
- Utiliser la définition de l'inverse d'une matrice

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Calculer A^2 puis A^3.

2. Vérifier que $A^3 - 3A^2 + 2I_3 = 0$.

3. En déduire la valeur de A^{-1}.

Exercice 9 ().

Savoir-Faire

- Effectuer un produit matriciel
- Effectuer une combinaison linéaire de matrices
- Inverser une matrice

On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Parmi les calculs suivants, dire lesquels sont possibles et dans ce cas les effectuer :

   (a) $A+B$ (c) BA (e) $2DC$ (g) BC (i) AC

   (b) AB (d) CD (f) $A+D$ (h) AD (j) $CA-A$

2. Calculer l'inverse de la matrice C

1.2 Exercices

Exercice 10 ().

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les antécédents de $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ par la transformation associée à la matrice A.

2. Le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ possède t-il un antécédent par cette transformation ? Une image ? Si oui les calculer.

3. En raisonnant par l'absurde, démontrer que A ne peut pas être inversible.

Exercice 11 ().

Soit $p \geq 1$ un entier et soit $M \in M_p(\mathbb{R})$.

On suppose qu'il existe un vecteur $v \in \mathbb{R}^p$ et un nombre $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $Mv = \lambda v$.

Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$, $M^n v = \lambda^n v$.

Exercice 12 (). *Démonstration de la proposition 4*

Démontrer que si $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ sont deux matrices inversibles, alors AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Exercice 13 (). *Autour des matrices de rotation*

Dans tout cet exercice, **on admet qu'une rotation du plan peut se décrire par une transformation matricielle** (ce qui n'est pas évident, car toutes les transformations qu'on peut imaginer ne se traduisent pas forcément par une matrice).

1. Démontrer que la matrice d'une rotation d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ autour du point $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ dans le sens trigonométrique est :

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

2. Sans aucun calcul mais seulement par interprétation géométrique, conjecturez la matrice R_θ^{-1}
3. Vérifiez par le calcul que la matrice conjecturée à la question précédente est bien l'inverse de $\mathbb{R}_\theta$
4. Soient $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$, et $R_{\theta_1}, R_{\theta_2}$ les matrices de rotations associées.

   (a) Que fait géométriquement la transformation

   $$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ x & \mapsto & R_{\theta_1} R_{\theta_2} x \end{array} \quad ?$$

   (b) Déterminer, avec deux manières différentes, deux expressions de la matrice de cette transformation.

(c) En déduire les formules d'addition de cosinus et sinus.

Exercice 14 ().

Soit $n \geq 2$ un entier.

On rappelle que deux matrices $M, N \in M_n(\mathbb{R})$ *commutent* si $MN = NM$.

On considère l'ensemble suivant :

$$Z = \left\{ M \in M_n(\mathbb{R}) \mid \forall A \in M_n(\mathbb{R}), AM = MA \right\}$$

Autrement dit, Z est l'ensemble des matrices qui commutent avec toutes les matrices.

Partie I : cas $n = 2$

On se place dans cette partie dans le cas où $n = 2$, c'est-à-dire dans $M_2(\mathbb{R})$.

1. Proposer deux matrices appartenant à Z.
2. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ appartient-elle à Z ?
3. Soit $M \in M_2(\mathbb{R})$. Déterminer des conditions nécessaires sur les coefficients de M pour qu'elle

commute avec les 4 matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Démontrer alors que

$$Z = \{\lambda I_2 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Partie II : cas n quelconque

On définit pour tout i tout j entiers entre 1 et n les matrices $E_{i,j}$ possédant un "1" en position (i,j) (ligne i, colonne j) et des "0" partout ailleurs.
Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$.

1. Exprimer $ME_{i,j}$ en fonction de i,j et des coefficients de M.
2. Exprimer également $E_{i,j}M$.
3. Déterminer alors Z.