Manipuler les matrices en tant que transformation du plan ou de l'espace

1.1 Aspect géométrique et produit matrice-vecteur

Les matrices sont des objets correspondant à certaines transformations géométriques, du plan ou de l'espace notamment (rotation, agrandissement, etc...).

Avant de définir de manière général cet objet, voyons deux exemples :

Dans le plan

Une matrice correspondant à une transformation du plan s'écrit sous la forme d'un tableau de nombre, composé de deux colonnes qui sont des vecteurs de $\mathbb{R}^2$. Par exemple,

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est une matrice, dont les vecteurs colonnes sont $C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $C_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Cette matrice transforme n'importe quel point (ou vecteur) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ en le point (ou vecteur) suivant :

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = xC_1 + yC_2 = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ y \end{pmatrix}$$

Vous pouvez visualiser les transformations causées par différentes matrices sur le lien suivant : https://www.geogebra.org/m/puvetmzw (utilisez les 4 curseurs pour modifier les coefficients de la matrice, puis cliquez sur la case dans la fenêtre de droite pour afficher le résultat après transformation). Essayez d'imaginer ce que va donner la transformation avant de la faire, par l'intermédiaire de calculs similaires à l'exemple ci-dessus.

Remarque 1 : Produit, multiplication

L'opération $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ qui permet de réaliser la transformation du point (ou du vecteur) s'appelle le produit (ou la multiplication) de M par $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Dans l'espace

Une matrice correspondant à une transformation de l'espace $\mathbb{R}^3$ s'écrit sous la forme d'un tableau de nombre, composé de trois colonnes qui sont des vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Par exemple,

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est une matrice, dont les vecteurs colonnes sont

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice transforme n'importe quel point (ou vecteur) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ en le point (ou vecteur) suivant :

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = xC_1 + yC_2 + zC_3 = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ z \\ x + z \end{pmatrix}$$

Vous pouvez visualiser les transformations causées par différentes matrices sur le lien suivant : https://www.geogebra.org/m/zhkyfddn (utilisez les 9 curseurs pour modifier les coefficients de la matrice, puis passez le curseur de $t = 0$ à $t = 1$ pour visualiser la transformation). Essayez d'imaginer ce que va donner la transformation avant de la faire, par l'intermédiaire de calculs similaires à l'exemple ci-dessus.

De nouveau, cette opération de calcul de la transformation s'appelle *faire* *le produit* entre la matrice M et le vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Voyons maintenant la définition générale de ces notions !

Définition 1 : Matrice

Soit n et p deux entiers strictement positifs.

Une matrice à n lignes et p colonnes est un tableau rectangulaire de réels ou de complexes de taille $n \times p$.

En particulier, une matrice n'est pas forcément "carrée", c'est-à-dire n'a pas forcément autant de lignes que de colonnes (on verra un peu après comment cela s'interprète géométriquement).

Il faut en particulier remarque que les vecteurs classiques écrits sous forme de coordonnées sont des matrices. Par exemple $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est une matrice à 3 lignes et 1 colonne.

Comme pour les nombres et les vecteurs, on a une notion d'égalité entre deux matrices :

Définition 2 : Égalité de deux matrices

Deux matrices sont égales lorsqu'elles ont la même taille et que les coefficients aux mêmes positions sont égaux.

Notation 1 :

De manière générique, une matrice A est notée par :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

Le terme de la i-ième ligne et de la j-ième colonne est $a_{i,j}$.

La notation condensée de cette matrice est aussi :

$$A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$$

ou plus simplement $A = (a_{i,j})$ si la taille de la matrice est claire.

Exemple 1 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

est une matrice 2×3 avec, par exemple, $a_{1,1} = 1$ et $a_{2,3} = 7$.

Notation 2 : Quelques ensembles de matrices

- L'ensemble des matrices $n \times p$ (n lignes et p colonnes) à coefficients dans $\mathbb{R}$ se note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

- L'ensemble des matrices $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{C}$ se note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$.

- L'ensemble des matrices carrés de taille n (n lignes et n colonnes) à coefficients dans $\mathbb{R}$ se note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

- L'ensemble des matrices carrés de taille n à coefficients dans $\mathbb{C}$ se note $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Définissons maintenant de manière générale le produit d'une matrice par un vecteur.

Définition 3 : Produit d'une matrice et d'un vecteur colonne

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice à n lignes et p colonnes. Notons $C_1, C_2, \dots, C_p$ les colonnes de A. On a donc $C_i \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Soit $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p$ un vecteur colonne.

Alors le *produit* de A et v, noté $A \cdot v$ ou simplement Av, est le vecteur

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = x_1C_1 + x_2C_2 + \cdots + x_pC_p$$

En particulier, un point important est que pour pouvoir faire la multiplication d'une matrice par un vecteur, **le nombre de colonnes de la matrice doit être égale au nombre de coordonnées du vecteur**.

Réciproquement, on pourrait écrire n'importe quelle combinaison linéaire en un produit d'une matrice par un vecteur.

Exemple 2 : Quelques exemples de produits matrice-vecteur

- Si

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  on a alors

$$Mv = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- Si

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

  on a alors

$$Mv = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Si

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad v = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

  on a alors

$$Mv = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Géométriquement, l'exemple ci-dessus signifie qu'on transforme un vecteur de $\mathbb{R}^2$ en un vecteur de $\mathbb{R}^3$, ce qui est un peu compliqué à visualiser, en tout cas plus compliqué que les transformations du plan ou de l'espace.

Image, antécédent On peut résumer la transformation associée à une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ avec le diagramme suivant :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \xrightarrow{A} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

On dit alors que :

- $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est *l'image* de $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ par la matrice A.
- $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est *un antécédent* de $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ par la matrice A

On peut alors noter que le calcul des antécédents revient à résoudre un système linéaire !

Exemple 3 : Lien avec les systèmes linéaires

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Prenons le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Quels sont ces antécédents ? Cela revient à chercher les vecteurs $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

autrement dit tels que

$$\begin{pmatrix} x + 2y - z \\ 2x + 3z \\ 4x + 2y + z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ce qui est équivalent au système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x + 3z = -1 \\ 4x + 2y + z = 1 \end{cases}$$

Remarque 2 : Écriture matricielle d'un système linéaire

L'exemple précédent montre aussi que **n'importe quel** système linéaire peut se réécrire comme une "équation matricielle" de la forme $Ax = b$ où x représente le vecteur des inconnues du système et b le vecteur des seconds membres.

Proposition 1 : Linéarité

Soit A une matrice de taille $n \times p$, soient $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p$ et $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p$.

Alors :

$$A(x + y) = Ax + Ay$$

De plus, pour tout nombre $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$A(\lambda x) = \lambda Ax$$

Cette propriété a l'air "normale" puisqu'on a l'habitude de développer ainsi sur les nombres. Mais justement ici ce ne sont plus des nombres mais des matrices, c'est donc bien une nouvelle propriété, qu'il faut démontrer.

Preuve :

Exercice de TD

1.2 Combinaisons linéaires de matrices

En dehors de l'opération de multiplication d'une matrice par un vecteur, il y a d'autres opérations à savoir faire ! En particulier la notion de combinaison linéaire, que l'on connaît sur les vecteurs, va se généraliser à des matrices qui ont les mêmes tailles.

Même si cette notion n'a pas d'interprétation géométrique particulière, elle est fondamentale dans la manipulation des matrices.

L'addition et la soustraction des matrices se font terme à terme. Pour cela, les matrices doivent avoir les mêmes dimensions :

Définition 4 : Addition des matrices

Soit n et p deux entiers strictement positifs, et deux matrices $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1;n]\!]\times[\![1;p]\!]}$ et $B = (b_{i,j})_{(i,j)\in[\![1;n]\!]\times[\![1;p]\!]}$.

de même taille $n \times p$.

Alors, la matrice $A + B$ est définie par :

$$A+B = \begin{pmatrix} a_{1,1}+b_{1,1} & a_{1,2}+b_{1,2} & \cdots & a_{1,p}+b_{1,p} \\ a_{2,1}+b_{2,1} & a_{2,2}+b_{2,2} & \cdots & a_{2,p}+b_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1}+b_{n,1} & a_{n,2}+b_{n,2} & \cdots & a_{n,p}+b_{n,p} \end{pmatrix}$$

En terme plus concis, la somme $C = A + B$ est la matrice de taille $n \times p$ définie par

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Exemple 4 : Exemples d'additions de matrices

Si $\quad A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \quad$ et $\quad B = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

alors

$$A + B = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Par contre si $\quad B' = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix} \quad$ alors $\quad A+B' \quad$ n'est pas définie.

La multiplication d'une matrice par un nombre est la matrice où chaque terme est lui-même multiplié par ce nombre :

Définition 5 : Multiplication d'une matrice par un scalaire

Soient m et n deux entiers strictement positifs, $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1;m]\!]\times[\![1;n]\!]}$ une matrice et $\lambda \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Alors, la matrice λA est définie par :

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{1,1} & \lambda a_{1,2} & \cdots & \lambda a_{1,n} \\ \lambda a_{2,1} & \lambda a_{2,2} & \cdots & \lambda a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m,1} & \lambda a_{m,2} & \cdots & \lambda a_{m,n} \end{pmatrix}$$

Exemple 5 : Exemple de multiplication d'une matrice par un scalaire

$$\text{Si} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \alpha = 2$$

Alors

$$\alpha A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Une combinaison linéaire de matrices est, comme pour les vecteurs, la combinaison des deux opérations ci-dessus : si $A_1, A_2, \dots, A_k$ sont des matrices de même taille, alors une combinaison linéaire de ces matrices est une opération de la forme

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \cdots + \lambda_k A_k$$

avec des nombres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ (réels ou complexes) qui sont les coefficients de la combinaison linéaires.

1.3 Produit de deux matrices

Un produit de deux matrices correspond à un enchaînement de deux transformations. Restons sur des transformations de $\mathbb{R}^2$ pour l'exemple :

$$\begin{tikzcd} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \arrow[r, "A_1"] \arrow[rr, bend right, "A_2A_1"'] & A_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \arrow[r, "A_2"] & A_2A_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{tikzcd}$$

Prenons comme exemple :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Comment calculer alors le résultat du produit $B = A_2A_1$? Déjà, on sait que cela doit donner une matrice de taille 2 puisque cela reste une transformation du plan.

Ensuite, d'après ce qu'on sait sur le produit matrice-vecteur, les colonnes de B sont

$$C_1 = B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C_2 = B \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Il suffit donc de faire ces deux calculs.

Or $B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = A_2A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = A_2v_1$, où v_1 est la première colonne de A_1. On aboutit donc à un produit matrice-vecteur, que l'on sait faire :

$$C_1 = A_2v_1 = A_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On a de même

$$C_2 = A_2 v_2 = A_2 \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Donc

$$A_2 A_1 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Voyons donc maintenant la définition du produit matriciel dans le cas général :

Définition 6 : Produit de deux matrices

Soit A une matrice ayant k lignes p colonnes et B une matrice ayant p lignes et n colonnes. En notant $C_1, \ldots, C_n$ les colonnes de B, alors on a :

$$AB = (AC_1 | AC_2 | \cdots | AC_n)$$

c'est-à-dire la matrice dont les colonnes sont AC_1, AC_2, etc...

Remarque 3 : Contraintes sur les tailles

On déduit de la définition que :

- pour pouvoir faire le produit AB il faut que le nombre de colonnes de A soit égal au nombre de lignes de B. Dans tous les autres cas, **on ne peut pas faire ce produit**.
- le produit AB n'est pas forcément le même que BA. Pire, parfois on peut faire l'un mais pas l'autre (tout dépend des tailles des matrices).

La définition ci-dessous est importante car elle souligne l'aspect géométrique. En pratique, c'est rare que l'on effectue le produit ainsi car il existe un moyen mnémotechnique plus rapide à automatiser pour la plupart des gens :

Méthode : Effectuer un produit

$$\begin{array}{rcl} & & \begin{pmatrix} & & & \times & \\ & & & \times & \\ & & & \times & \\ & & & \times & \end{pmatrix} \leftarrow B \\ A \rightarrow \begin{pmatrix} & & & \\ \times & \times & \times & \times \\ & & & \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} & & & | & \\ & & & | & \\ - & - & - & c_{ij} & \\ & & & & \end{pmatrix} \leftarrow AB \end{array}$$

Avec cette disposition, on considère d'abord la ligne de la matrice A située à gauche du coefficient que l'on veut calculer (ligne représentée par des $\times$ dans A) et aussi la colonne de la matrice B située au-dessus du coefficient que l'on veut calculer (colonne représentée par des $\times$ dans B).

On calcule le produit du premier coefficient de la ligne par le premier coefficient de la colonne, que l'on ajoute au produit du deuxième coefficient de la ligne par le deuxième coefficient de la colonne ($a_{i2} \times b_{2j}$), etc...

Un petit exemple pour voir ça en pratique :

Exemple 6 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On dispose d'abord le produit correctement (à gauche) : la matrice obtenue est de taille 2×2. Puis on calcule chacun des coefficients, en commençant par le premier coefficient $c_{11} = 1 \times 1 + 2 \times (-1) + 3 \times 1 = 2$ (au milieu), puis les autres (à droite).

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} \color{red}{1} & 2 \\ \color{red}{-1} & 1 \\ \color{red}{1} & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \color{red}{1} & \color{red}{2} & \color{red}{3} \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \color{blue}{2} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 11 \end{pmatrix} \end{array}$$

Remarque 4 : Quelques ”pièges”

- Le produit de matrices n'est pas commutatif en général : on n'a pas toujours $AB = BA$! En effet, il se peut que AB soit défini mais pas BA, ou que AB et BA soient tous deux définis mais pas de la même taille. Mais même dans le cas où AB et BA sont définis et de la même taille, on a en général $AB \neq BA$. Exemple :

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 3 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}$$

mais

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 29 & -2 \end{pmatrix}.$$

En particulier il faut faire attention lors de calcul de puissances :

$$(AB)^2 = ABAB \neq A^2B^2$$

- $AB = 0$ n'implique pas $A = 0$ ou $B = 0$.

  Il peut arriver que le produit de deux matrices non nulles soit nul.

  En d'autres termes, on peut avoir $A \neq 0$ et $B \neq 0$ mais $AB = 0$.

  Exemple :

  $$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- $AB = AC$ n'implique pas $B = C$. On peut avoir $AB = AC$ et $B \neq C$. Exemple :

  $$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

  et

  $$AB = AC = \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 15 & 12 \end{pmatrix}.$$

▸ **Pour aller plus loin**.

Pour des manipulations plus théoriques ou abstraites, il est intéressant d'avoir une expression des coefficients d'un produit matriciel à l'aide du symbole somme, qui sera vu un peu plus tard dans le semestre :

Définition 7 : Produit de deux matrices

Soit p, q et r trois entiers strictement positifs, et deux matrices $A = (a_{i,j})_{(i,j)} \in \mathcal{M}_{p,q}$ et $B = (b_{i,j})_{(i,j)} \in \mathcal{M}_{q,r}$.

Alors, la matrice $A \cdot B$ est donnée par la matrice $C = (c_{i,j})_{(i,j)} \in \mathcal{M}_{p,r}$, où les coefficientss $c_{i,j}$ sont définis par :

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{q} a_{i,k} b_{k,j} \ .$$

Le produit vérifie les propriétés suivantes que l'on a l'habitude d'utiliser avec des nombres :

Proposition 2 :

- $A(BC) = (AB)C$: associativité du produit,
- $A(B+C) = AB+AC$ et $(B+C)A = BA+CA$: distributivité du produit par rapport à la somme,
- Si $(0)_{p,q}$ désigne la matrice nulle de taille $p \times q$, alors pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$, on a : $A(0)_{q,r} = (0)_{p,r}$ et $(0)_{r,p}A = (0)_{r,q}$

1.4 Matrice identité et matrice inverse

Dans cette partie, on se demande comment déterminer la matrice qui "défait" une transformation. Par exemple dans $\mathbb{R}^2$, pour une transformation définie par une matrice A (de taille 2 du coup), on cherche la matrice U_A telle que :

$$\begin{tikzcd}[column sep=large] \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \arrow[r, "A"] \arrow[rr, bend right, "U_A A"'] & A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \arrow[r, "U_A"] & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{tikzcd}$$

En particulier, $U_A A$ doit donc être la matrice qui ne fait "rien". Cette matrice est appelée matrice *identité* :

Définition 8 : Matrice Identité

La matrice carrée suivante s'appelle la *matrice identité* :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Ses éléments diagonaux sont égaux à 1 et tous ses autres éléments sont égaux à 0. Elle se note I_n ou simplement I.

Dans le calcul matriciel, la matrice identité joue un rôle analogue à celui du nombre 1 pour les réels : n'importe quel vecteur, ou n'importe quelle matrice, est inchangée lors d'une multiplication par l'identité. En d'autres termes :

Proposition 3 :

Si A est une matrice $n \times p$, alors

$$I_n \cdot A = A \qquad \text{et} \qquad A \cdot I_p = A.$$

On peut alors donner une définition précise de ce qu'est une matrice *inversible*, c'est-à-dire une transformation que l'on peut effectivement "défaire" pour revenir à l'état initial :

Définition 9 : Inverse d'une matrice carré

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On dit que A est *inversible* si, et seulement s'il existe une matrice $U_A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$U_A A = I_n$$

Lorsque U_A existe, on note $U_A = A^{-1}$ et on a alors aussi $AU_A = I_n$.

Exemple 7 :

La matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et son inverse est : $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Notation 3 :

On note $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients réels qui sont inversibles.

La propriété ci-dessous sera démontrer en TD, l'interprétation géométrique en terme de transformations peut être utile pour ne pas faire d'erreur à cause des automatismes qu'on a sur les nombres (la puissance qui se met sur chacun des termes d'un produit).

Proposition 4 :

Soit $A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Alors AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Preuve :

Exercice de TD

En revanche, cette définition ne nous permet pas de calculer cette transformation inverse !

Pour cela, il faut revenir à ce que fait globalement la matrice U_A (ou A^{-1})

$$\begin{tikzcd} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \arrow[r, "A"] & A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \arrow[l, bend left, "U_A"] \end{tikzcd}$$

D'après le diagramme ci-dessus, partant de la relation $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, si on réussit à exprimer $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ en fonction de a et b on aura alors l'expression de A^{-1}. Cela revient à résoudre un système linéaire !

Détaillons en dimension 3, en notant

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

On cherche à inverser la relation $Av = b$.

On cherche alors à passer de

$$\begin{cases} \dots x_1 & + & \dots x_2 & + & \dots x_3 & = & b_1 & & \\ \dots x_1 & + & \dots x_2 & + & \dots x_3 & = & & b_2 & \\ \dots x_1 & + & \dots x_2 & + & \dots x_3 & = & & & b_3 \end{cases}$$

à

$$\begin{cases} x_1 & & & = \dots b_1 + \dots b_2 + \dots b_3 \\ & x_2 & & = \dots b_1 + \dots b_2 + \dots b_3 \\ & & x_3 & = \dots b_1 + \dots b_2 + \dots b_3 \end{cases}$$

Bon bah il suffit de résoudre, mais à première vue ça semble être un peu lourd à écrire. Ci-dessus j'ai décalé un peu les b_1, b_2, b_3 et les x_1, x_2, x_3, pour essayer de visualiser sous quelle forme plus légère on va pouvoir inverser une matrice au lieu d'écrire les systèmes linéaires.

Bonne pratique : Inversion de matrice : écriture allégée

On souhaite inverser la matrice suivante

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

On va alors "coller" la matrice identité :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

puis faire les opérations élémentaires habituelles que l'on fait sur les systèmes linéaires (attention à bien faire les opérations simultanément sur les deux matrices !) pour obtenir :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & a & b & d \\ 0 & 1 & 0 & e & f & g \\ 0 & 0 & 1 & h & i & j \end{array}\right)$$

La matrice de droite est alors la matrice inverse recherchée !

Exemple 8 : Inversion de matrice

C'est parti, reprenons la matrice de l'encadré "Bonne pratique" ci-dessus, dont on cherche à savoir si elle est inversible, et si oui l'inverser. On part de :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Échelonnons par des opérations élémentaires : en effectuant $L_2 \leftarrow 2L_2 - 3L_1$ et $L_3 \leftarrow 2L_3 - 3L_1$ on obtient

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Puis avec $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right)$$

En effectuant $L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3$ et $L_1 \leftarrow L_1 - L_3$ on a

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right)$$

Enfin, par $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 4 & 4 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right)$$

et en divisant L_1 et L_3 par 2 on obtient

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

L'inverse de la matrice de départ est donc $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ -3 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Remarque 5 :

Comme ça ne coûte pas trop cher, on peut rapidement vérifier à la fin qu'en faisant le produit de la matrice de départ avec son inverse, on retombe sur la matrice identité ! (si ce n'est pas le cas c'est qu'une erreur de calcul s'est glissée quelque part...)